Т.Х. Адиров, И.М. Хамдамов, З.С. Чай

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Т.Х.АДИРОВ,И.М.ХАМДАМОВ,З.С.ЧАЙ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Ташкент- 2017

УЎК: 519.2
А 30
КБК 22.17

Адиров Т.Х., Хамдамов И.М.,Чай З.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Т.: «Aloqachi», 2017. – 240 стр.

ISBN 978–9943–5034–6–5

Это пособие не только учебник, но и краткое руководство к решению задач. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики сопровождаются большим количеством задач, приводимых с решениями и задачами для самостоятельного решения.

Предназначено для бакалавров всех направлений технических вузов, молодым преподавателям и всем, кто применяет в своей работе теоретико-вероятностные методы. Математический материал, изложенный в данной книге, является математической базой для многих математических методов, применяемых в технических и экономических моделях.

Учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственного стандарта.

УЎК: 519.2
А 30
КБК 22.17

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Ташкентского финансового института Ш.Ш.Бабажанов;

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Алгоритмизация и математическое моделирование» Ташкентского университета информационных технологий У.Н.Каландаров;

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ташкентского государственного технического университета С.Н. Расулов.

ISBN 978–9943–5034–6–5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в нашей стране вопросам, связанным с образованием и наукой, уделяется особое внимание со стороны правительства, то есть наука и образование считаются приоритетнейшими направлениями в развитии республики. Это подтверждают последние постановления Президента Республики Узбекистан Шавката Мирзиёева “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования” (от 20 апреля 2017 года) и “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Ташкентского Университета Информационных Технологий”.

Президентом Республики Узбекистан определены конкретные задачи по дальнейшему совершенствованию деятельности вузов страны, более эффективному использованию его интеллектуального потенциала в комплексном развитии регионов, привлечению молодежи к научно-исследовательской деятельности. В реализации поставленных задач очень важным является ориентирование научно-исследовательских работ на актуальные проблемы социально-экономической отрасли, обеспечение интеграции между наукой и производством, создание программных продуктов и обеспечение их и внедрение в различные отрасли деятельности человека.

В основу этого пособия положен курс лекций по теории вероятностей и математической статистике,который читался авторами в течение многих лет на втором курсе Ташкентского университета информационных технологий и Ташкентского финансового университета бакалаврам всех направлений. Со временем курс неоднократно менялся в поисках варианта, более доступного для понимания.

Авторы стремились преподнести материал на уровне, доступном студентам технических вузов и стремились опираться только на знание студентами основ классического математического анализа, старались избегать громоздких выкладок и доказательств, но в то же время сохранить вероятностную и статическую сущность рассматриваемых вопросов и исходили из того, что наиболее эффективной формой изучения теории вероятностей, помимо обычного изучения теоретического материала, является самостоятельная работа студентов над практическими заданиями.

В каждом параграфе приведены задачи, которые могут служить материалом для практических занятий по курсу. В приложении приведены краткие статистические таблицы, необходимые для решения задач.

Эти задачи относятся к разным областям,таким как электротехника, информационные системы, надежность технических систем, финансы, бытовое обслуживание и т.д.Задачи, собранные для самостоятельного решения, весьма различны по трудности и их решение будет возможным после приобретения навыков, полученных в результате усвоения теоретических знаний. С точки зрения авторов наибольший интерес в пособии представляют подробные решения задач и комментарии к ним.

Данное пособие занимает в некотором смысле промежуточное положение между учебником и сборником задач.Оно может быть полезно студентам,преподавателям вузов и широкому кругу читателей, занимающимся вопросами самообразования.

Отметим, что теоретический материал, изложенный в данной книге, является математической базой далеко не всех математических методов, применяемых в технических и экономических моделях и здесь не ставиласьцель охватить в полном объеме математическую основу всех математических методов, применяемых в различных областях деятельности человека.

§1.1 ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ.ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

1. Случайные события и предмет теории вероятностей

Дисциплина теории вероятностей отличается большим своеобразием.Необычный характер теоретико-вероятностных понятий является причиной того, что долгое время подход к этим понятиям основывался только на интуитивных соображениях. Настоящее и по-современному строгое обоснование теории вероятностей появилось сравнительно недавно в 30-х годах двадцатого века – в трудах русского математика академика А.Н.Колмогорова. С этого времени теория вероятностей превратилась в стройную дисциплину, в такой же мере безупречную, как скажем, математический анализ или теория чисел.

Аксиоматический метод А.Н.Колмогорова состоит в том, что с самогоначала фиксируются не подлежащие определению ***понятия*** данной теории. Их основные свойства формулируются в виде аксиом. После этоговсе предложения теории выводятся из аксиом строго логическим путем, без обращения к посторонним понятиям, наглядности, «здравому смыслу» и т. д. Но такое построение теории требует от студента знания абстрактной теории меры, интеграла Лебега и т. д. В данном учебном пособии, учитывая математическую подготовку студента, откажемся от такого подхода и рассмотрим интуитивный подход к этим понятиям. Он базируется на совершенно естественных, но вместе с тем не вполне строгих рассуждениях. Тем не менее, этот способ изложения материала позволяет быстрее дойти до сути дела.

На практике часто возникают такие ситуации, когда исход проводимого нами опыта (эксперимента, испытания) нельзя предсказать заранее с полной уверенностью. Например, невозможно предсказать, какая грань выпадет при бросании монеты, на исход этого опыта влияет огромное число факторов, таких, как начальное положение монеты в момент броска, начальная скорость, сопротивление воздуха, особенности поверхности, на которую падает монета, и т.д. Аналогичным образом, невозможно предсказать, останется ли исправной купленная нами в магазине электрическая лампа после тысячи часов работы, выпадет ли выигрыш на лотерейный билет с определенным номером и т.д. Во всех подобных ситуациях мы вынуждены считать результат опыта зависящим от случая, рассматривать его как ***случайное событие.***

Определение 1.Некоторое событие называется ***случайным*** по отношению к данному опыту, если при осуществлении этого опыта оно может произойти , а может и не произойти.

Примером случайного события может служить выпадение герба в опыте с бросанием монеты, выигрыш по данному лотерейному билету, совпадение дней рождения у двух наугад выбранных людей. Случайные события обозначаются в дальнейшем латинскими прописными буквами A, B, C и т.д.

Виды случайных событий.Согласно данному выше определению, событие считается случайным, если его наступление в результате опыта представляет собой лишь одну из его возможностей. Под это определение формально подходят и такие события, которые в результате данного опыта обязательно наступают; эти события называют ***достоверными.*** Например, достоверным является событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадает целое число очков или что выбранное наугад слово из данной лекции содержит не более 50 букв. Итак, достоверное событие можно рассматривать как одну из разновидностей случайного события. Оно обозначается символом Ω (омега).

Аналогичное замечание относится и к ***невозможным*** событиям, т.е. таким, которые никогда не наступают при осуществлении данного опыта. Невозможное событие тоже можно рассматривать как случайное. Примером невозможного события может служить получение двух выигрышей по одному билету. Невозможное событие обозначается символом пустое множество $\varnothing$.

Определение 2.События называют ***несовместными,*** если появление одного из них исключает появление любого из остальных событий в одном и том же испытании.

Комментарий к определению 2. Несовместные события не могут появиться в результате одного опыта.

Можно говорить о нескольких несовместных событиях $A_1, A_2, ..., A_n$; в этом случае имеют в виду, что события $A_1, A_2, ..., A_n$ не могут наступить все сразу в результате одного испытания. Если в множестве $A_1, A_2, ..., A_n$ событий каждые два несовместны, то говорят, что эти события ***попарно несовместны***.

Например, при бросании игральной кости события A «выпадет количество очков, равное 1 или 2» и B «выпадет количество очков, равное 4 или 5», несовместны.

Определение 3. События называют ***равновозможными,*** если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Вдальнейшем нас будут интересовать только такие опыты, которые можно повторить (в принципе) неограниченное число раз; именно такой характер носит опыт с бросанием монеты, с покупкой лотерейного билета, с обследованием изделия на годность или брак. Любое случайное событие, наступление которого возможно в такого рода опытах, называется ***массовым*** или ***статистическим.***

Массовые случайные события следует отличать от единичных, исключительных, обладающих той особенностью, что опыт, с которым связаны эти события, принципиально невоспроизводимы. Например «1 сентября 2013 года в Ташкенте шел дождь» является исключительным, так как воспроизвести наступление указанного дня невозможно. В то же время события «1 сентября в Ташкенте шел дождь» (без упоминания года) является, несомненно, массовым: ведь наблюдать погоду в Ташкенте 1 сентября можно в течение многих лет.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, с которого, собственно, и должно начинаться знакомство с теорией вероятностей: чем занимается, какие задачи ставит перед собой эта дисциплина?

Теория вероятностей занимается изучением и выявлениям закономерностей, характерных массовым случайным событиям.

Простейший пример закономерности такого рода дает опыт с бросанием монеты. Предположим, что бросание производится много раз подряд. Исход каждого отдельного бросания является случайным, неопределенным. Однако ***результат при*** большом числе бросаний утрачивает случайный характер, становится закономерным. А именно: «доля» тех бросаний, при которых выпадает герб (т.е. отношение числа таких бросаний к числу всех бросаний) с увеличением числа бросаний приближается к 1/2 .

2. Элементарное событие

В определении 1 ***случайное событие*** было рассмотрено нами как результат опыта, зависящего от случая.

Следует подчеркнуть, что всякий опыт (эксперимент, испытание) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий инаблюдении результата. ***Рассматриваются только такие опыты, которые можно повторять (воспроизводить) при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере, теоретически).***

Предметом наблюдения в том или ином опыте можетбыть некоторый процесс, физическое явление или действующая система.Для реально воспроизводимого опыта понятие «наблюдаемыйрезультат» означает, чтосуществует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора (в простейшем случае, например, визуально). Любой наблюдаемыйрезультат интерпретируется как случайный исход опыта ***(случайноесобытие).***Событие может произойти, а может и не произойти в результате опыта.

При математической формализации модели опыта отправным пунктом является понятие ***пространства*** (***множества) элементарных исходов***(обозначается Ω), связанного с данным опытом. Под этим понимают множество взаимоисключающих исходов такое, что результатом опыта всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно,и ненаблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет***поле событий*** для данного опыта.

Очевидно, что:

- событиенаступает, если результатом опыта является элементарный исход, принадлежащий A $(\omega \in A)$;
- событие, совпадающее с пустым множеством$\varnothing$- невозможное событие;
- событие, совпадающее со всем множеством Ω - достоверное событие.

МножествоΩдля данного опыта может быть дискретным, непрерывным или иметь более сложную структуру. К дискретным относятся конечные или счетные множества элементарных исходов. К непрерывным относятсямножества типа континуума. Любой конечный или бесконечный промежутокчисловой прямой является примером множества типа континуума. В дальнейшем мы рассматриваем только такие модели опытов, для которых множество элементарных исходов Ω либо дискретно, либо непрерывно.

Построение множества Ω (если оно не задано при описании опыта) осуществляется на практике, исходя из требования, чтобывсе интересующие нас результаты данного опыта могли бытьоднозначно описаны на основе построенного множества Ω. Другимисловами, если нас интересуют события A, B, C и т.д., являющиесянаблюдаемыми событиями в данном эксперименте, то множество Ωдолжно состоять из таких исходов, чтобы существовали подмножества данного множества, равносильные событиямA, B, C и т.д.

Так как понятие «элементарный исход» строго не определяемо, тоуказанная задача допускает не единственное решение и зависит от набора интересующих нас событий. Если потребовать, чтобы правилооднозначного описания выполнялось для всего поля событий, то в этомслучае понятие элементарного исхода становится более определенным. Именно, в совокупности всех подмножеств множества Ω, составляющихполе событий, элементарные исходы являются одноэлементными подмножествами.

Пример 1.1 Опыт состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Обозначим X - число очков,выпавших на верхней грани кости.Описать множество элементарныхисходов Ω и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A=\{X \text{ кратно трем}\},\ A=\{X \text{ кратно трем}\},\ B=(X \text{ нечетно}\},\ C=\{X>3\},$$

$$D=\{X<7\},\ E=\{X \text{ дробно}\},\ F=\{0{,}5<X<1{,}5\}.$$

Выявить парысовместных событий.

Решение: Введем обозначения для следующих наблюдаемых в данном опыте событий:

$$\omega_k=\{X=k\},\ k=1,2,...,6;\ \omega^{(1)}=\{X-\textit{нечетное число}\};$$

$$\omega^{(2)}=\{X-\textit{четное число}\}$$

На базе данных исходов можно сконструировать два достоверныхсобытия:

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_3\}\ \text{и}\ \Omega_2=\{\omega^{(1)},\omega^{(2)}\}.$$

Какое из них большеподходит в качестве множества элементарных исходов? Ясно, что Ω_2 следует «забраковать», поскольку, например, наблюдаемые события $\omega_1,\omega_2,...,\omega_6, A, B, D, E$ не являются подмножествами множеств Ω_2.
С другой стороны, все перечисленные события могут быть описаны как подмножества множества Ω_1. Действительно,

$$A=\{\omega_3,\omega_6\},\ B=\omega^{(1)}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\},\ C=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\},$$
$$D=\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\},\ E=\varnothing,\ F=\{\omega_1\}.$$

Из написанных равенств, в частности, видно, чтоисходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ разложимы на элементы, которые сами являются исходами данного опыта. Таким образом, исходы $\omega_1,\omega_2,...,\omega_6$ более«элементарны», чем исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и B, A иC, A иD, B иC, BиD, E иF,C иD, D иF.

3. Операции над событиями

В этом пункте мы ознакомимся с тремя основными видами комбинации событий: сумма событий, произведение событие, противоположное событие.

Определение 4. Если с некоторым опытом связаны события A и B,то **их суммой** называет третье событие$A+B$,которое считаетсянаступившим тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событийAиB.

Пример 1.2 Пусть в опыте с бросанием игральной кости событиеA есть выпадение числа, кратного 2, аB– выпадение числа, кратного 3. Тогда$A+B$будет выпадение хотя бы одного из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 5. Если с некоторым опытом связаны событияAи B, то**их произведением** называют третье событие$A\cdot B$(илиAB), которое считается наступившим тогда и только тогда, когда наступают оба событияAиBодновременно.

Другими словами, AB есть совместное наступление событийAи B.Если, например, AиB– события из вышеприведенного примера, связанные с бросанием игральной кости, то событиеABозначает выпадение 6 очков.

Определение 6. Событие$\overline{A}$назовем событием, **противоположным**A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходитA.

Комментарии к определениям 1-3.

1) Определения 4 - 5 описывают подмножества элементарных событий, благоприятствующих сумме событий AиB, произведению событийAиB; событию, противоположному кA.

2)Операции суммы,произведенияидополнения событий обладают такими свойствами, как

$A+B=B+A,\quad AB=BA,\quad A(B+C)=AB+AC,$
$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC)$ и т.д.

Определение 7. Множество событий вместе с операциями суммы, произведения событий и перехода к противоположному событию составляют (сигма)***алгебру событий***(*если в операции участвует конечное число событий, то ее называют алгеброй событий).*

3) Рассматривают сумму трехиболеесобытий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$(быть может, бесконечного числа), которую обозначают $A_1+A_2+...+A_n+...=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.Событие $\sum A_i$ состоитв том, что врезультатеопыта наступит хотябыодноиз событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Аналогично, произведение трех и более событий (быть может, бесконечного числа) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$обозначается $A_1\cdot A_2\cdots A_n\cdots=\prod_{i=1}^{\infty} A_i$. Событие $\prod A_i$ состоит в том, что в результате опыта наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Пример 1.3 Пусть при бросании игральной кости событие A означает, что выпадет четное число очков, а событие B - что количество очков не превзойдет четырех. Ясно, что $A=\{2,4,6\}$; $B=\{1,2,3,4\}$; $(A+B)=\{1,2,3,4,6\}$; $(AB)=\{2,4\}$. Иными словами, событие $A+B$ наступает при выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 6, а событие AB - при выпадении чисел 2,4.

Для событий $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A+B}, \overline{AB}$, противоположными соответственно к событиям $A, B, A+B, AB$, получим $\overline{A}=\{1,3,5\}$; $\overline{B}=\{5,6\}$; $(\overline{A+B})=\{5\}$; $(\overline{AB})=\{1,3,5,6\}$.

Пример 1.4 Пусть при игре в спортлото события A, B, C заключаются в том, что выбранная в результате опыта шестерка чисел содержит соответственно числа 7, 12, 20. Результатом испытания оказалась шестерка чисел 7, 8, 9, 20, 21, 42. Какие из следующих событий наступили при этом:

$$A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, ABC, A+B, A+C, \overline{A+C} \ ?$$

Решение. Обозначим множество {7, 8, 9, 20, 21, 42} через M . Тогда получим, что из перечисленных в условии событий наступили следующие: A, поскольку $7\in M$; C , так как $20\in M$; $\overline{B}$ поскольку $12\notin M$;

$A+B$, так как $7 \in M$; $A+C$, поскольку $7 \in M$ и $20 \in M$. Остальные из перечисленных событий не наступили.

В алгебре событий справедливы формулы

$$\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}, \quad (1.1)$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}. \quad (1.2)$$

Строгийвывод этих формул мы опускаем. Левая частьформулы (1.1)естьсобытие,противоположное к $A_1 + A_2 + ... + A_n$. Последнее событие наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из $A_i \, (i = 1, 2, ..., n)$. Событием, противоположным тому, что наступит хотя бы одно из A_i ,является событие, состоящее в том, что не наступит ни одно из A_i т.е. наступит каждое из $\overline{A_i}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$.

Левая часть формулы (1.2) есть событие, противоположное событию $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$. Последнее событие состоит в том, что наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Событием, противоположным тому, что наступит каждое из $A_i \, (i = 1, 2, ..., n)$, является событие, состоящее в том, что не наступит хотя бы одно из $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$, т. е. что наступит хотя бы одно из $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}$.

Пример 1.5Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а)Какое событие является противоположным событию A: «хотя бы один стрелок попал в цель»?

б)Какое событие противоположно событию «каждый из стрелков попал в цель?»

Решение. а) Таким событием является «каждый из стрелков промахнулся» или, что то же самое, «ни один не попал в цель». Справедливость ответа вытекает из того, что событие A означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ -не поражениемишени. Этот пример иллюстрирует формулу (1.1).

б) Таким событием является «хотя бы один из стрелков промахнулся». Этот пример иллюстрирует формулу (1.2).

Определение 8. Разностью $A-B$ **событий** назовем событие которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A и не происходит B.

Определение 9. Мы будем писать $A \subseteq B$ и говорить, что событие A влечет за собой событие B, если из наступления события A следует наступление события B. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ то мы будем говорить, что события A и B **равносильны**, и писать $A = B$.

§1.2 ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Классическое определение вероятности[1]

Определение 1. Всякий опыт, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ представляет собой конечное множество равновероятных исходов, называется **классической схемой или схемой урн.**

Вероятность любого события $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_m}\} \subset \Omega$ определяется по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

где m - число элементов множества A (число всех благоприятных событию A элементарныхисходов), n - число элементов множества Ω (число всех элементарныхисходов эксперимента).

Классическая схема[2] является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны, содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров. (Отсюда и название - схема урн.)

Пример 1.6 Брошены две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события $A =$ {сумма выпавших очков делится на 6}.

---

[1] или **классическая вероятностная схема - схема урн.**

[2] Этим способом пользовались французские математики XVII в. Блез Паскаль и Пьер Ферма, рассматривавшие формулу (1.3) как определение вероятности. В далекое от нашей эпохи время трудно было предвидеть роль понятия вероятности, разнообразие и серьезность будущих приложений теории вероятностей к естествознанию, технике и экономике. Первоначальным материалом, на котором «отрабатывались» простейшие факты теории, были азартные игры. С тех пор задачи о бросании игральной кости, об извлечении карт из колоды, шаров из урны и т. п. стали традиционными для теории вероятностей. Заметим, что и по сей день, эти задачи сохраняют свою роль как тренировочные упражнения, а в некоторых случаях – как наглядные модели для более серьезных вероятностных схем.

Решение.Элементарный исход эксперимента (опыта) можно описать парой чисел $\omega_{ij} = (i, j)$, гдеi–число очков, выпавших на первой кости, а j–на второй $(i, j = 1, 2, ..., 6)$. Поэтому множество элементарных исходов выглядит

$$\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i, j) : i = 1, 2, ..., 6; \quad j = 1, 2, ..., 6\right\}.$$

Нетрудно проверить, что число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) $n=36$. Другими словами, общее число элементарных событий $n=36$.Событие A соответствует подмножеству

$$\{(1,5), \ (5,1), \ (2,4), \ (4,2), \ (3,3), \ (6,6)\} \subset \Omega,$$

то есть

$$A = \{(1,5), \ (5,1), \ (2,4), \ (4,2), \ (3,3), \ (6,6)\} \subset \Omega .$$

Так как число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию Aэлементарныхисходов) $m=6$, то по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

В этом примере помимо нахождения n - числа элементов множества Ω (число всех элементарныхисходов эксперимента) и m - числа элементов множества A(число всех благоприятствующих событию Aэлементарныхисходов), нам удалось полностью описать то, из чего состоят множества Ω иA. Однако во многих случаях описание содержания этих множеств является практически невозможным. Следует отметить, что это и не является обязательным. Обязательным является нахождения чиселmиn. Нахождение этих чисел, а значит, вычисление вероятностей в классической схеме лучше вычислять,используя формулы комбинаторики.

Теперь приведем ***классическое определение вероятности.***

Определение2.Вероятностью $P(A)$ события A называют отношение числа элементарныхисходов, благоприятных для этого события, к общему числу всех элементарных исходов испытания: $P(A)=\frac{m}{n}$.

2. Статистический подход к понятию вероятности

Существует еще один подход к понятию вероятности, не связанный с пространством элементарных событий. В основе этого подхода лежит явление устойчивости частоты наступления события при многократном повторении испытаний. Пусть в результате некоторого опыта возможно появление события A.Повторим опыт n раз и подсчитаем количество m наступлений событий A. Будем предполагать, что в данной серии опытов результаты предшествующих испытаний не влияют на последующие. Как известно из практики, отношение $\frac{m}{n}$ мало изменяется при больших n несмотря на то, что событие A случайное и величина m также зависит от случая. В частности, если монету подбрасывать многократно, то отношение количества выпавших гербов к общему числу бросаний монеты приближенно будет равно 1/2.

Отношение $\frac{m}{n}$ называется ***частотой***появления события A в n испытаниях.При условии устойчивости частоты появления события A число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятности как к характеристике того, насколько вероятно изучаемое событие с точки зрения практики и здравого смысла. Действительно, число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет неравенству $0 \le \frac{m}{n} \le 1$, более вероятным с точки зрения здравого смысла событиям соответствует большее значение $\frac{m}{n}$, для невозможных событий $\frac{m}{n}=0$, для достоверных $\frac{m}{n}=1$; если событие Aявляется суммой двух несовместных событий B и C, т.е. $A=B+C$, то $\frac{m_A}{n}=\frac{m_B}{n}+\frac{m_C}{n}$, где m_A, m_B, m_C - количество наступлений событий в n опытах. В силу сказанного (и при том условии, что возможно многократное повторение опыта с устойчивостью частоты) отношение $\frac{m}{n}$ называют статистической вероятностью события A.

В дальнейшем будет доказано (закон больших чисел Бернулли), что если для события A определена его классическая вероятность p, то частное $\frac{m_n}{n}$, где m_n случайная величина, выражающая количество наступлений события A в n независимых друг от друга испытаниях, при больших n «почти всегда» мало отличается от p. Таким образом, известное из практики явление оказывается строго доказанным математическим утверждением.

Следует заметить, что статистическое определение вероятности в некоторых случаях единственно доступно для измерения и исследования: действительно, далеко не всегда можно изучать случайные события с помощью пространства элементарных событий. Например, при изучении стрельбы по мишени невозможно указать разумную модель пространства элементарных событий, отражающую существенные стороны исследуемых испытаний.

3. Геометрические вероятности

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, что называется вероятностью события в строго математическом смысле. Строгое определение понятия вероятности развивает идею конечного пространства элементарных событий и приводится в солидных учебниках по теории вероятностей. Здесь будут указаны лишь главные черты такого определения.

Пусть дано некоторое множество X (пространство элементарных событий, описанное в п. 2). Изучаемые события представляют собой подмножества в X. Задана также функция p, которая подмножествам в X сопоставляет число из числового отрезка [0,1].Требуется, чтобы эта функция обладала свойством аддитивности, т.е. чтобы для всяких двух непересекающихся подмножеств $A,B\subset X$ для которых p определена, было справедливо равенство

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B); \tag{1.4}$$

кроме того, $P(\varnothing)=0,\ P(X)=1$.

Определение 3. Значение функции $P(\cdot)$ на множестве A называется **вероятностью события** A.

Следует отметить, что множество X в отличие от п. 4[3] может быть бесконечным; например, X - отрезок числовой прямой, вся прямая, квадрат на плоскости, вся плоскость и т. п.

Часто функцию $P(\cdot)$ бывает невозможно определить для всех подмножеств множества X ; в этом случае ее определяют только для некоторых (так называемых измеримых) подмножеств (подробнее см.в солидных учебниках по теории вероятностей).

Наглядным примером вероятностной модели может служить ***геометрическая вероятность.***

Пусть X - множество точек квадрата на плоскости, т.е. $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, из которого наугад выбирается точка. Определим вероятность того, что выбранная точка окажется в подмножестве $A \subset X$ равенством

$$P(A) = \frac{S(A)}{(b-a)^2}, \tag{1.5}$$

где $S(A)$ - площадь фигуры A. Ясно, что $P(X)=1$. Свойство (1.4) для функции (1.5) выполняется, поскольку площадь объединения двух непересекающихся фигур равна сумме площадей этих фигур.

Пример 1.7Два приятеля договорились встретиться в установленном месте в промежутке времени от 6 до 7 ч. По взаимному соглашению каждый приходит на место встречи в случайный момент времени из этого временного интервала и ждет другого ровно 10 мин. Какова вероятность того, что приятели встретятся?

Решение. Пусть x и y означают моменты прихода на место встречипервого и второго приятеля соответственно. Такое событие удобно отметить точкой квадрата (рис. 1.1).

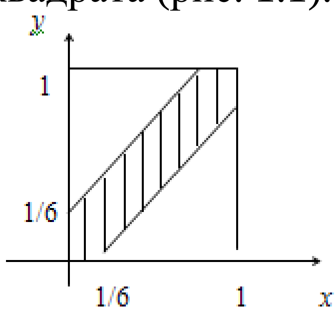


Рис. 1.1

Условие встречи заключаются в том, что

[3] Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания – конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых – бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо.

$$|x-y|<\frac{1}{6} \qquad (1.6)$$

(сторона квадрата соответствует часу времени, 10 мин составляет 1/6 ч). Множество точек, удовлетворяющих условию (1.6), отмечено на рисунке штриховкой. Площадь этого множества равна 11 /36. Согласно формуле (1.5), вероятность встречи

$$p=\frac{{}^{11}\!/_{36}}{(7-6)^2}=\frac{11}{36}.$$

По условию каждый из приятелей приходит на место встречи, выбирая момент прихода наугад.Формула (1.5) естественным образом обобщается на случай пространства любой размерности.

Пусть $\Omega \subset R^n$. Для подмножества $A\subset\Omega$ определим значение $P(\cdot)$ равенством

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$

где $mes(A)$ – мера множества A (длина, площадь, объем и т.д. в зависимости от размерности того пространства, в котором рассматриваются данные множества).

4. Аксиомы теории вероятностей.

До сих пор в попытке определения вероятности события в строго математическом смысле на множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий рассматривалась функция $P(A)$ с требованием выполнения условия аддитивности и $P(\varnothing)=0,\ P(X)=1$. Затемвероятность события Aопределили как значение функции $P(\cdot)$ на множестве A

Ниже эту идею, следуя А.Н. Колмогорову, сформулируем в виде аксиом.

Вероятностью $P(A)$ называется числовая функция, определенная на[4] множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей):

1^0. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$.

2^0. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то

[4] поле событий (см.п.2 §1.1) для данного опыта, и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей): *Далее по тексту.*

$$P(A_1 + A_2, + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

Заметим, что при бесконечном числе событий $A_1, A_2, \ldots$ в правой части написанного равенства стоит ***суммаряда.***

Очевидно, если множество Ω является конечным, то любая совокупность попарно не пересекающихся подмножеств состоит лишь из конечного числа подмножеств. Отсюда ясно, что для случая конечного Ω аксиома 2^0 равнозначна такому (в общем случае болееслабому) требованию:

2^{*0}. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны.

Чтобы подчеркнуть существенное различие между аксиомами 2^0 и 2^{*0}, часто называют аксиому 2^{*0} аксиомой аддитивности, а 2^0- аксиомой счетной аддитивности,

3^0. $P(\Omega) = 1$.

Аксиомы 1-3 составляют основу всей теории вероятностей.Все теоремы этой теории, включая самые сложные, выводятся изних формально-логическим путем.

Укажем несколько примеров такого вывода.

Следствие.Исходя из очевидного соотношения между подмножествами

$$A + \overline{A} = \Omega\,,$$

и применяя аксиомы 2^0 и 3^0, получаем, что

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Задачи для самостоятельного решения

1. В группе из 30 учеников на контрольной работе 6 учеников получили оценку «отлично», 10 учеников «хорошо», 9 учеников «удовлетворительно». Какова вероятность того, что все три вызванных к доске ученика, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:
   а) сумма выпавших очков равна восьми, а разность четырем.
   б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разностьравна четырем.
3. В коробке содержится 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

4. Какова вероятность того, что в январе, наудачу взятого года окажется 4 воскресенья?
5. Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 с дефектом, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность следующих событий:
   а) все три детали без дефектов.
   б) две детали без дефектов.
   в) хотя бы одна деталь без дефектов.
6. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.
7. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв: О, П, Р, С, Т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию»-кубиках можно будет прочесть слово «СПОРТ».
8. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной и выложенных в ряд карточках можно будет прочесть слово «трос».
9. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одного размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.
10. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
11. Восемь различных книг расставляют наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.
12. Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем 5 книг стоит по 4000 сум каждая, три книги - по 1000 сум, две книги - по 3000 сум. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5000 сум.
13. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц, окажутся 3 женщины.
14. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 отличников.
15. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два опреде-

ленных лица окажутся рядом, если число мест равно 8.

16. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятность следующих событий A= {ни на одной кости не выпадет 6 очков}; B= {хотя бы на одной кости выпадет 6 очков}; C ={равно на 3 костях выпадет 6 очков}.
17. Собрание из 25 человек, среди которых 5 женщин, выбирает наудачу 3 делегатов на конференцию. Найти вероятность того, что в состав делегации вошли 2 женщины и 1 мужчина.
18. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв среди имеющихся: {а, б, к, о, м} и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность, что в результате будет выложено слово "мама"?
19. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3-первокурсника, 5- второкурсников и 7-третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: A ={будут выбраны одни третьекурсники}; B ={все первокурсники попадут на конференцию}; C ={не будет выбрано ни одного второкурсника}.
20. Два равных противника играют матч из n партий в теннис. Каждая партия заканчивается выигрышем, либо проигрышем одного из участников. Все исходы данного матча равновероятны. Найти вероятность того, что первый игрок выиграет равно m партий ($m \leq n$).
21. На удачу, выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: A= {число одинаково читается как слева на право, так и справа налево (как например, 13531)}; B= {число кратно пяти}; C= {число состоит из нечетных цифр}.
22. 1 сентября на первом курсе изучается 10 предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из 3-х предметов равновозможное?
23. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи белаяи черная. Какова вероятность того что ладьи не бьют друг друга?
24. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимает очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность того что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?

Геометрические вероятности

25. В шар вписан куб. Точка наудачу брошена внутрь шара. Найти вероятность того, что она попадет внутрь куба.

26. Внутрь круга радиуса R брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат, вписанный в этот круг.
27. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.
28. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в черный и белый цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов.
29. В квадрат вписан круг. Найти вероятность того, что наудачу брошенная во внутрь квадрата точка попадет внутрь круга.
30. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (между 12 и 13 часами).
31. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?
32. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равномерно распределено в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода - один час, а второго два часа.
33. На отрезок AB длиной 12 см брошена точка C. Найти вероятность того, что площадь квадрата, построенного на стороне AC, заключена между 36 см² и 81 см².
34. Внутри квадрата с вершинами (0;0), (1;0), (1;1), (0;1) наудачу выбирается точка $M(x;y)$. Найти вероятность события $A=\{(x,y): x^2+y^2\le a^2, a>0\}$.
35. Значения a,b равновозможные в квадрате $|a|\le 1,\ |b|\le 1$. Найти вероятности следующих событий
$A=${корни квадратного трехчлена $x^2+2ax+b$ действительны},
$B=${корни квадратного трехчлена $x^2+2ax+b$ положительны}.
36. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки

A, B и C. Какова вероятность того, что ΔABC-остроугольный?

37. Из отрезка $[-1;2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1?

§1.3 ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛАБАЙЕСА

1. Теорема сложения вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{1.7}$$

Доказательство. Рассмотрим очевидные соотношения между событиями (как между подмножествами множества Ω):

$A = AB + A\overline{B}$, $\quad A + B = B + A\overline{B}$. (это видно из рис. 1.2)

Применяя к этим равенствам аксиому сложения, получим два числовыхравенства:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}), \qquad P(A+B) = P(B) + P(A\overline{B}).$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, получаем формулу (1.7).

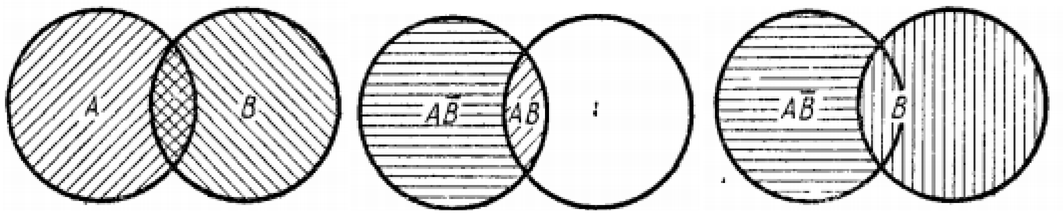


Рис. 1.2

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2(обобщенная теорема сложения вероятностей). Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ совместные события, то справедливо соотношение

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \cdots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \cdots.$$

Доказательствоопускаем.

2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1.Событие Aназывается***независимым***от события B, если вероятность события A не зависит от того, наступило событие B илинет. В противном случае событие A называется ***зависимым***от события B.

Комментарий к определению 1. В дальнейшем будет доказано, что если случайное событие A не зависит от B, то и B не зависит от A.

Примеры:

1)Монету подбрасывают два раза. Событие A состоит в том, что в первый раз выпадет герб, а событие B - в том, что во второй раз выпадет решка. Эти события, очевидно, независимы, поскольку второе бросание никак не может повлиять на первое.

2) Из деревьев леса наудачу выбирают одно. Событие A состоит в том, что дерево высокое (выше некоторого уровня, равного, например, 15 м), а событие B - в том, что дерево толстое (скажем, диаметр ствола больше 1 м). Эти события зависимы, поскольку вероятность выбрать высокое дерево увеличивается, если выбирать его среди толстых деревьев.

Определение 2.Вероятность наступления события A при условии, что событие B наступило, **называется *условной вероятностью***и вычисляется по формуле $P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, если $P(B)\neq 0$.

Теорема 1(теорема умножения вероятностей).Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что A произошло, т. е.

$$P(AB)=P(A)P_A(B), \tag{1.8}$$

Для независимых событий A и B справедливо равенство

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.9}$$

Доказательство, очевидным образом следует из определения 2.Убедимся в справедливости теоремы для случая конечного пространства элементарных исходов.

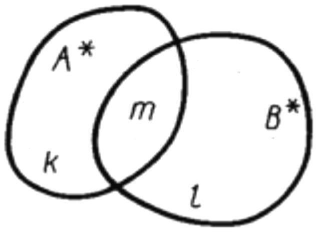


Рис. 1.3

Пусть событиям A и B соответствуют множества A^* и B^*, изображенные на рис. 1.3. Далее, пусть область A^* содержит k точек, область B^* - l точек и в пересечении $A^* \cap B^*$ содержится m точек; всего же в пространстве элементарных исходов имеется n точек. По определению, $P(A)=\frac{k}{n}$, $P(AB)=\frac{m}{n}$ (произведение AB изображается множеством $A^* \cap B^*$. Заметим, что условная вероятность $P_A(B)=\frac{k}{m}$; действительно, событию B при условии, что A произошло, благоприятствуют m элементарных исходов, а наступление события A означает наступление одного из k элементарных исходов. Так как $\frac{m}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{m}{k}$, то $P(AB)=P(A)P_A(B)$,т. е. имеет место равенство (1.8).

В случае, когда событие B не зависит от события A ,имеем $P(B)=P_A(B)$ и равенство (1.8) примет вид $P(AB)=P(A)P(B)$.

Теперь приведем более конкретное определениеширокого понятия независимости, а именно:

Определение 3. Говорят, что событие A не зависит от B ,если выполняется равенство (1.9).

В дальнейшем независимость A от B будет пониматься как выполнение равенства (1.9).

Следствие 1.Если случайное событие B не зависит от A ,то и A не зависит от B .

Действительно, по условию $P(AB)=P(A)P(B)=P(B)P(A)$;кроме того, по теореме умножения вероятностей $P(AB)=P(B)P_B(A)$. Поэтому в случае $P(B)\neq 0$ имеем $P(A)=P_B(A)$,т. е. событие A не зависит от B .

Иначе говоря, отношение независимостиявляется симметричным. Поэтому в дальнейшем мы можем говоритьпросто о независимых событиях A и B .

Следствие 2.Нетрудно видеть, что если A и B независимы, то независимы также события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Пример 1.8Изурны, состоящей 3 черных и 2 белых шара,извлекают последовательно (без возвращения) два шара. Событие Aсостоит в том, что первым будет взят белый шар, а событие B-втом, что второй шар окажется черным. Найти вероятность произведения (т.е. совместного наступления) событий Aи B.

Решение. В силу теоремы умножения вероятностей имеем

$$P(AB)=P(A)P_A(B).$$

Очевидно, что $P(A)=\frac{2}{5}$. Так как после извлечения белого шара в урне осталось 4 шара (1 белый и 3 черных), то при этих условиях вероятность извлечения черного шара $P_A(B)=\frac{3}{4}$. Итак, $P(AB)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

Пример 1.9 Какова вероятность выпадения двух гербов при двукратном бросании монеты?

Решение.Пусть A - выпадение герба при первом бросании, а B-выпадение герба при втором бросании; тогда

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Аналогично, применяя теорему умножения несколько раз, получаем: вероятность того, что приnбросаниях монеты герб выпадаетnраз, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Замечание.Считая $P(A)\neq 0$, получим,

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.10}$$

Пример 1.10 Все грани игральной кости заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – красной, грани 4, 5, 6 – черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

Решение. Очевидно, мы должны найти условную вероятность $p_A(B)$, где событие Bесть выпадение четного числа очков, а событие A – выпадение числа очков, большего 3. Имеем:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Для сравнения отметим, что безусловная вероятность события B (просто $P(B)$) равна $1/2$.

Пример 1.11 Из колод игральных карт наугад выбирают одну карту. Пусть событие A заключается в том, что вынутая карта является «тузом», а события B – в том, что карта красной масти («бубновая» или «червовая»). Интуитивная ясно, что A не зависит от B (цена карты не зависит от масти). Проверим это подсчетом. Так как

$$P(A) = \frac{4}{36},\ P(B) = \frac{18}{36},\ P(AB) = \frac{2}{36},$$

следовательно, события A и B независимы.

В практических вопросах для установления независимостиодного события от другого редко прибегают к проверке равенства (1.9). Обычно при этом довольствуются интуитивными соображениями. Так, например, если бросают подряд две монеты, то ясно,что выпадение той или другой стороны на одной монете не оказываетникакого влияния на условия бросания другой, и, значит, следующие два события: выпадение герба на одной монете (событие A) и выпадение герба на другой (событие B) - являются независимыми.

Определение 3. Несколько событий называют ***попарно независимыми,***если каждые два из них независимы.

Пример 1.12 Монета брошена 3 раза. Пусть A, B, C- события, состоящие в появлении герба соответственно в первом, втором и третьем испытаниях. Ясно, что каждые два из рассматриваемых событий (т. е. Aи B, Aи C, Bи C) — независимы.

Таким образом, события A, B и C - попарно независимые.

Определение 4. Несколько событий называют ***независимыми в совокупности,*** если каждое из них и любая комбинация остальных событий (содержащая либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые и для любой комбинациииз них вероятность произведения равна произведению вероятностей.

Например,отсюда следует, что если каждое из них и любая комбинация остальных событий (содержащая либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые.Действительно, если события A_1, A_2 и A_3 независимые в совокупности, то независимыми являются события: A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3, A_1A_2 и A_3, A_1A_3 и A_2, A_2A_3 и A_1.

Комментарий к определению 4. Если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Привести пример, показывающий, что из попарной независимости событий A, B, C не следует их независимость в совокупности.

Теорема 2 (обобщенная теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)\ , \qquad (1.11)$$

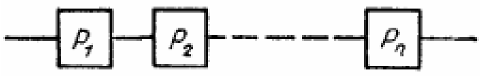
где $P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$ - вероятность события, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ наступили.

Теперь введем более широкое понятие независимости в совокупности, а именно:

Определение 5. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности,*** если выполняется следующее условие: каково бы ни было подмножество $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ множеств $\{1, 2, ..., n\}$ справедливо равенство

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}) \qquad (1.12)$$

Пример 1.13 Электрическая схема состоит из ***n*** последовательно соединенных блоков:



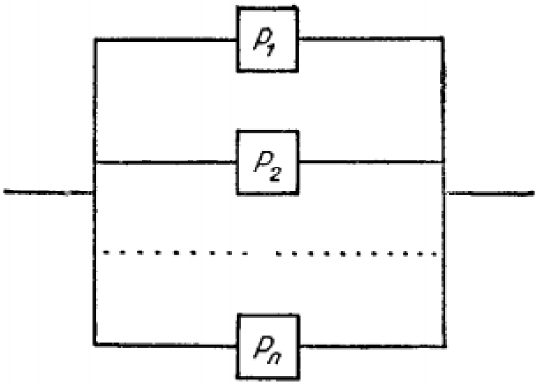
Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого блока равна соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

Решение. Событие, заключающееся в исправной работе i-го блока, обозначим A_i; исправность схемы в целом обозначим A. Так как блоки собраны последовательно, то A имеет место в том и только в том случае, когда имеют место все A_i. Поэтому

$$A = A_1A_2...A_n,$$

откуда в силу независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$ следует

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n) = p_1 p_2 ... p_n.$$



Таже самая задача для схемы из параллельносоединенных блоков приводит к другому результату. В этом случае выход схемы из строя происходит лишь в том случае, когда выходят из строя все блоки. Это значит, что

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 ... \overline{A}_n$$

и, следовательно,

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n) = (1 - p_1)(1 - p_2)...(1 - p_n).$$

Таким образом, надежность всей схемы оказывается равной

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)...(1 - p_n).$$

Пример 1.14 Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто».

Решение. Введем обозначение для событий:

$$A_1 = \{\text{первой извлечена буква «} c \text{»}\};$$

$$A_2 = \{\text{второй извлечена буква «т»}\};$$

$$A_3 = \{\text{третьей извлечена буква «} o \text{»}\};$$

$$A = \{\text{получилось слово «сто»}\}.$$

Очевидно, $A = A_1 A_2 A_3$. Имеем последовательно:

$$P(A_1) = \frac{1}{5}; \quad P(A_1 A_2) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20};$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

Итак, $P(A) = \dfrac{1}{30}$.

3. Полная группа событий

Определение. ***Полной группой*** называют систему $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместных событий, если появление в результате опыта одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 1.15Стрелок производит по мишени 2 выстрела. Следующие события A_1 -$\{\text{одно попадание}\}$; A_2 -$\{\text{два попадание}\}$; A_3– $\{\text{промах}\}$ образуют полную группу.

Для событий, образующих полную группу, имеет место следующая

Теорема 3. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Доказательство: Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1.$Так как любые два события полной группы несовместны, то по теореме сложения несовместных событий

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

С помощью понятия полной группы событий можно дать другое определение противоположных событий.

Противоположными событиями называют два события, образующие полную группу.

На основании приведенной выше теоремы, сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Как правило, при рассмотрении противоположных событий вероятность одного из них обозначают p, а вероятность другого черезq.

Таким образом, $p+q=1.$

Пример 1.16Вероятность того, что день будет ясный равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет дождливый.

Решение. По условию $p=0,7$. Тогда как $q=1-p.$ т.е. $q=1-0,7=0,3.$

Очень часто при решении задач на нахождение вероятности события Aбывает удобно найти сначала вероятность противоположного события $\bar{A}$, а затем вероятность искомого события по формуле: $P(A)=1-P(\bar{A}).$

Пример 1.17Студент из 50 экзаменационных вопросов знает ответ на 30 вопросов. Какова вероятность того, что из заданных ему на удачу 5 вопросов он знает ответ хотя бы на один вопрос?

Решение.Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос. Тогда событие $\overline{A}$ - студент не знает ответа ни на один вопрос - противоположное событие. Вероятность события $\overline{A}$ легко находится по классическому определению вероятности: $P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{20}^{5}}{C_{50}^{5}}$.Тогда искомая вероятность

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{20}^{5}}{C_{50}^{5}}.$$

4. Формула полной вероятности.Формула Байеса.

Следствием основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является так называемая формула полной вероятности, а следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая теорема гипотез или формула Байеса. Этот пункт посвящается этим формулам.

4.1.Одним из эффективных методов подсчета вероятностей является формула полной вероятности, с помощью которой решается широкий круг интересных задач.

Теорема 4 (теорема о полной вероятности).Пусть $B_1,B_2,...,B_n$— попарно несовместные,образующие полную группусобытия, имеющие соответственно вероятности $P(B_1),P(B_2),...,P(B_n)$. Пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1,B_2,...,B_n$, и $P_{B_1}(A),P_{B_2}(A),...,P_{B_n}(A)$ - условные вероятности события A при условии, что $B_1,B_2,...,B_n$ наступили. Тогда вероятность $P(A)$ события A равна сумме произведений вероятностей событий B_nна условные вероятности $P_{B_n}(A)$:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A) \quad (1.12)$$

Доказательство. По условию,

$$A(B_1+B_2+...+B_n)=A \text{ и } AB_1+AB_2+...+AB_n=A.$$

Применяя сначала теорему сложения, а затем теорему умножения вероятностей, получим

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Формула (1.12) называется ***формулой полной вероятности.***

Пример 1.18Производится серия из четырех выстрелов по некоторому объекту. Вероятности попадания в цель одного, двух, трех и четырех снарядов заданы таблицей

1	2	3	4
0,4	0,26	0,22	0,12

Вероятности разрушения объекта при условии попадания одного, двух, трех и четырех снарядов даны в таблице

1	2	3	4
0,5	0,7	0,8	0,99

Найти вероятность разрушения объекта.

Решение. Первая таблица задает вероятности $P(B_1),P(B_2),P(B_3),P(B_4)$, а вторая - вероятности $P_{B_1}(A),P_{B_2}(A),P_{B_3}(A),P_{B_4}(A)$(событие B_iсостоит в попадании в цель i (i =1, 2, 3, 4) снарядов, событие A={разрушение мишени}). По формуле (1.12) находим

$$P(A)= 0,4\cdot 0,5 + 0,26\cdot 0,7 + 0,22\cdot 0,8 + 0,12\cdot 0,99 = 0,6768.$$

4.2. Теперь приступаем к обсуждению формулы Байеса.

Теорема 5 (теорема Байеса).Пусть события $B_1,B_2,...,B_n$, попарно несовместные,образующие полную группу и пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1,B_2,...,B_n$ Известны вероятности $P(B_1),P(B_2),...,P(B_n)$событий $B_1,B_2,...,B_n$, и условные вероятности $P_{B_1}(A),P_{B_2}(A),...,P_{B_n}(A)$события A при условиях $B_1,B_2,...,B_n$. Известно также, что событие A наступило. Тогда вероятности событий $B_1,B_2,...,B_n$, при условии, что событие A наступило, находятся по формулам

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)},\quad i=1,2,...,n. \quad (1.13)$$

Комментарии к теореме .

1) Вероятности $P_A(B_i)$ называются послеопытными (апостериорными) вероятностями событий B_i, а вероятности $P(B_i)$ — доопытными (априорными) вероятностями событий B_i). Эти вероятности различаются, как будет видно из примеров.

2)Знаменательв правой частиформулы(1.13)совпадает справойчастью формулы (1.12) и равен $P(A)$, т.е. является формулой полной вероятности.

3)События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ называются часто гипотезами и формула (1.13) дает вероятности гипотезы B_i, при которой наступило событие A.

Доказательство.Согласно теореме умножения вероятностей, имеем

$$P(AB_i) = P_A(B_i) \cdot P(A) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \tag{1.14}$$

Подставляя в знаменатель правой части равенства (1.14) вместо $P(A)$ правую часть формулы (1.12), получаем соотношение (1.13).

Формулы (1.13) называются ***формулами Байеса (или формулами гипотез).***

Пример 1.19Выход из строя прибора (событие A) может быть вызван одной из трех причин B_1, B_2, B_3, вероятности которых $P(B_1) = 0.7$, $P(B_2) = 0.2$, $P(B_3) = 0.1$. При наличии этих причин выход прибора из строя происходит с вероятностями $P_{B_1}(A) = 0.1$, $P_{B_2}(A) = 0.2$, $P_{B_3}(A) = 0.99$. Известно, что прибор вышел из строя. Найти вероятности $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, $P_A(B_3)$.

Решение. Используя формулы (1.13), получим

$$P_A(B_1) = \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,07}{0,13} = \frac{7}{13};$$

$$P_A(B_2) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,04}{0,13} = \frac{4}{13};$$

$$P_A(B_3) = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2} = \frac{0,02}{0,13} = \frac{2}{13}.$$

Из результатов вычислений видно, что апостериорные вероятности отличаются от априорных.

Задачи для самостоятельного решения

1. Отдел технического контроля проверяет изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равно 0.9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.
2. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочнике равны 0.6, 0.7 и 0.8 соответственно. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех справочниках.
3. Студент знает 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что из наудачу заданных ему 3 вопросов он ответит на все три.
4. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта равна 0.8. Найти вероятность того, что из 5 взятых изделий 3-высшего сорта.
5. В первом ящике содержится 4 белых и 8 красных шаров. Во втором ящике 10 белых и 6 красных. Из каждого ящика взято по одному шару. Найти вероятность того, что оба взятых шара белого цвета.
6. В цехе работают 7 мужчин и 8 женщин. По табельным номерам наудачу отобрано три человека. Какова вероятность того, что все отобранные лица окажутся женщинами?
7. В первом ящике 5 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 10 белых и 5 черных шаров. Из каждого ящика взято по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из взятых шаров белый?
8. Вероятность того, что в течение смены станок выйдет из строя равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение трех смен станок будет работать исправно.
9. Монета бросается до первого выпадения герба. Найти вероятности того, что число бросаний монеты будет четным числом.
10. Три исследователя независимо друг от друга производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0.1. Для второго и третьего эта вероятность равна 0.15 и 0.2соответственно. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.
11. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей ($k \le n$) для открывания данной двери.

12. Электрическая цепь состоит из трех соединенных последовательно элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого, второго и третьего элемента равна 0.1, 0.15, 0.2соответственно. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.
13. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0.5. Спортсмены выполняют упражнения по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.
14. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0.875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.
15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0.9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
16. Студент может доехать до института или автобусом, который ходит через каждый 20 минут или маршрутным такси, который ходит через каждые 30 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут ?
17. Монета бросается до тех пор, пока два раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий:

а) опыт кончится до шестого бросания;

б) потребуется четное число бросаний.

18. В читальном зале имеется 15 учебников, из которых 5 в переплете. Найти вероятность того, что из трех взятых наугад учебников хотя бы один окажется в переплете.
19. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить с вероятностью 1/4 и разделиться на две с вероятностью 1/2. В следующем таком же «происхождении» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?
20. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки- независимые и равновероятные события, выяснить вероятность того, что оба ребенка- мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.
21. Тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, желтый и синий цвета, а четвертая грань, содержит все три цвета, бросается наудачу на плоскость. Событие K,G и S состоят в

том, что тетраэдр упал на грань, содержащую соответственно красный, желтый либо синий цвет. Доказать, что указанные события попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

22. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский; 40 французский; 35 немецкий. Английский и французский язык знают 20 студентов, английский и немецкий 8, французский и немецкий 10. Все 3 языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Из следующих событий:

E ={вышедший знает английский}, D={вышедший знает немецкий},

F ={вышедший знает французский}.

а) указать все пары независимых событий.

б) установить, являются ли событие E, F и D независимыми в совокупности.

23. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин - дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число женщин и мужчин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

24. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения:

25. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых. Во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу взято по одному шару, затем из этих двух шаров снова наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что этот шар оказался белым.

26. Вероятности того, что во время работы электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах относятся как 3:2:5 . Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах равны 0.8, 0.9 и 0.9соответственно. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

27. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу проезжающих по этому шоссе легковых автомобилей как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0.1; для легковой машины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина.

Найти вероятность того, что это грузовая машина.

28. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 20% с заболеванием M, 30% с заболеванием L. Вероятность полного излечения болезни K равна 0.7, для болезней L и M эти вероятности равны соответственно 0.8 и 0.9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.
29. Произведено 3 одиночных выстрела по самолету. Вероятность попадания при первом выстреле 0.5; при втором 0.6; при третьем 0.8. Вероятность сбить самолет при одном попадании равна 0.3; при двух попаданиях 0.6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит, если для вывода самолета из строя достаточно трех попаданий.
30. Продукция, изготавливаемая в цехе, проверяется 2 контролерами. Вероятность того, что деталь попадет на проверку к первому контролеру равна 0.6; ко второму контролеру 0.4. Вероятность принять качественную деталь за бракованную равна для первого контролера 0.06, для второго контролера эта вероятность 0.02. Среди забракованных деталей оказалась качественная. Найти вероятность того, что она проверялась первым контролером.
31. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров. Во второй 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар – белый.
32. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй – 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый.
33. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 штук, из них 5 поврежденных, во второй 30 штук, из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взяли яблоко. Какова вероятность того, что яблоко не повреждено?
34. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0.1% бракованных, со второго 0.2%, с третьего 0.25%, с четвертого 0.5%. Из производительности относятся как 4:3:2:1соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.
35. Прибор установленный на борту самолета, может работать в двух

режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки в 20% . Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0.1, в условиях перегрузки 0.4. Вычислить надежность прибора за время полета.

36. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со 2 или с 3 группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с 1 первой группой крови можно перелить только 1 группу крови.Среди населения 33.7% имеют 1 группу; 37.5% – 2 группу; 20.9% – 3 группу; и 7.9% – 4 группу крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

37. В коробке находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании, другая-неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появилась с вероятностью $1/3$, единица с вероятностью $1/9$, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена, и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

38. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные – 20, подготовленных удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез: H_1={студент подготовлен отлично или хорошо}, H_2={студенты подготовлены удовлетворительно}, H_3={студент подготовлен плохо}.

§1.4 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХИСПЫТАНИЙ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

При практическом применении теории вероятностей часто приходится встречаться с задачами, в которых одно и то же испытание или аналогичные испытания повторяются неоднократно. В результате каждого испытания может появиться или не появиться некоторое событие A, причем нас интересует не результат каждого отдельного испытания, а общее число появлений события A в результате испытаний. Например, если производится серия выстрелов по одной и той же цели, нас, как правило, интересует не результат каждого выстрела, а общее число попаданий. Такие задачи рассматриваются на этой и следующей лекциях. Оказывается при определенных условиях они решаются весьма просто.

1. Последовательность независимых испытаний (Схема Бернулли).

Пусть производится серия из n испытаний, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Пусть при этом выполнено следующее условие: вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, т.е. не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний.

Это условие означает, что последовательность испытаний независима (вероятность p не зависит от результатов предыдущих испытаний).

Определение. Последовательность испытаний, удовлетворяющих указанному условию, называется ***последовательностью независимых испытаний (или схемой Бернулли)*** относительно события A. Схема Бернулли полностью определяется двумя числами - натуральным числом n , означающим количество испытаний, и числом p ($0 < p < 1$), означающим вероятность наступления события A в одном испытании (безразлично, в каком по счету).

Примеры. Следующие серии опытов представляют собой конкретные модели схемы Бернулли:

1) Монету подбрасывают n раз; вероятность появления герба в одном испытании есть $p = 1/2$.

2) Производят n выстрелов по мишени. Предполагается, что вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна p.

Отметим, однако, что если в процессе стрельбы стрелок пристрелялся и стал лучше поражать мишень, то такая последовательность испытаний не является схемой Бернулли.

3) Из кучи зерна отбирают n зерен для проверки их на всхожесть. Вероятность того, что каждое зерно при проверке дает положительный результат, постоянна (так будет, например, в том случае, когда куча зерна большая, а зерна отбирают наугад после перемешивания).

В связи со схемой Бернулли рассматривают такие задачи:

1. Найти вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n испытаний событие A наступит ровно k раз. Решение этой задачи дает формула Бернулли.

2. Найти вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что в серии из n испытаний количество k наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 < k < k_2$.

3. Решить задачу 1 для больших чисел n и k (формула Бернулли, дающая решение задачи 1, неудобна для вычислений при больших n и k). Задача 3 решается с помощью локальной теоремы Муавра- Лапласа.

4. Решить задачу 2 для больших чисел n, k_1, k_2 (формула Бернулли мало пригодна для вычислений $P_n(k_1,k_2)$ при больших n, k_1, k_2). Задача решается с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

2. Формула Бернулли.

Теорема 1. Вероятность $P_n(k)$ того, что в последовательности из n испытаний в схеме Бернулли событие A наступит ровно k раз, выражается формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетании из n элементов по k; p — вероятность наступления события A в одном испытании; $q = 1 - p$ – вероятность ненаступления события A в одном испытании.

Доказательство. Рассмотрим последовательность из k плюсов и $n-k$ минусов, расположенных в произвольном, но фиксированном порядке. Каждая такая последовательность задает событие при «n -

кратном испытании в схеме Бернулли: знак «+» или «-» на k-м месте последовательности означает наступление или ненаступление события A при k-м испытаниисоответственно. Вероятность такого события (расположение k плюсов и $n-k$ минусов в произвольном, но фиксированном порядке) в силу теоремы умножения вероятностей равна $p^k q^{n-k}$ и не зависит от порядка плюсов и минусов в рассматриваемой последовательности. При этом последовательности с различным расположением kплюсов и $n-k$минусов определяют различные попарно несовместные события. Количество таких последовательностей из k плюсов и $n-k$ минусов равно числу сочетаний из nэлементов по k. Действительно, последовательность будет полностью определена, если из множества номеров$\{1,2,...,n\}$выбраноk номерови плюсы в последовательности поставлены на места с номерами из выбранного множества.

Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad ,$$

где, как известно, число сочетаний из n элементов по k выражается формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad .$$

(их называют биномиальными коэффициентами).

Пример 1.20Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты выпадет ровно 3 герба.

Решение. Здесь $n=10,\quad k=3,\quad p=\dfrac{1}{2}$. Согласно формуле Бернулли, получим

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024} \; .$$

Пример 1.21 Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $1/3$. Найти вероятность того, что из 6 выстрелов три поразят мишень.

Решение.Используя формулу Бернулли при $n=6$, $k=3$, $p=\dfrac{1}{3}$, $q=\dfrac{2}{3}$, находим

$$P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{8}{729} = \frac{160}{729}\ .$$

Пример 1.22 Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 7 отобранных зерен ровно 5 окажутся всхожими?

Решение. Имеем

$$P_7(5) = C_7^5\,0{,}9^5\cdot0{,}1^2 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 21\cdot0{,}0059049 = 0{,}124.$$

Пример 1.23 В схеме Бернулли, связанной с бросанием монеты, вычислить вероятности $P_{10}(k)$, где $k=\overline{0,10}$, (т. е. вероятности того, что в 10 испытаниях герб выпадет ровно *k* раз).

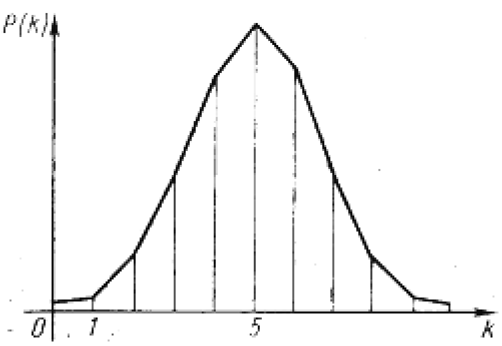


Рис.1

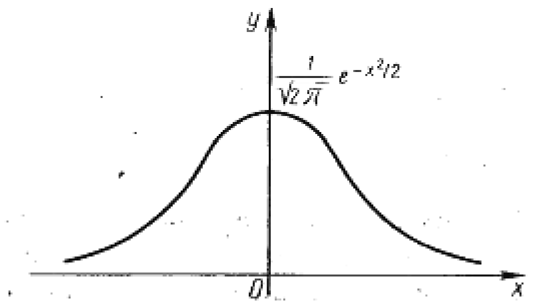


Рис.2

Решение. Используя формулу Бернулли при $p=q=\dfrac{1}{2}$, $k=0,1,2,...,10$, получим

$P_{10}(10)=\dfrac{1}{1024},\quad P_{10}(1)=\dfrac{10}{1024},\quad P_{10}(2)=\dfrac{45}{1024},\quad P_{10}(3)=\dfrac{120}{1024},\quad P_{10}(4)=\dfrac{210}{1024},$
$P_{10}(5)=\dfrac{252}{1024},\quad P_{10}(6)=\dfrac{210}{1024},\quad P_{10}(7)=\dfrac{120}{1024},\quad P_{10}(8)=\dfrac{45}{1024},\quad P_{10}(9)=\dfrac{10}{1024},$
$P_{10}(10)=\dfrac{1}{1024}$.

Результаты вычислений иллюстрирует (рис.1), из которого видно, что наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5)\approx0,25$. Сравнительно велики и значения $P_{10}(4)$ и $P_{10}(6)$ $(\approx0,21)$; в то же время «крайние» значения k дают $P_{10}(0)=P_{10}(10)\approx0{,}001.$

Обратим внимание на характерный вид изображенной на (рис. 1) ломаной, имеющей пик в точке $k=5$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с кривой $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (рис.2). Она называется гауссовой кривой (или кривой нормального распределения) и играет исключительно важную роль в теории вероятностей.

Тот факт, что ломаная на (рис. 1) и кривая на (рис. 2) имеют значительное сходство, не случаен. Причины этого явления раскрываются локальной теоремой Муавра-Лапласа.

Для вычисления вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ того, что в схеме Бернулли из n испытаний количество m наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le m < k_2$, можно использовать формулу

$$P_n(k_1,k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+\ldots+P_n(k_2-1)\ . \tag{1.15}$$

Событие, о котором идет речь, является суммой попарно несовместных событий B_i $(i=k_1,k_1+1,\ldots,k_2-1)$, состоящих в том, что в n испытаниях событие A наступит ровно i раз; затем, используя теорему сложения вероятностей, получаем формулу (1.15).

В частности, вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1);$$

$$P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n);$$

$$P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n);$$

$$P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k).$$

3. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях. Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, но крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 \le np+p\ ,$$

причем:

а) если число $np-q$ -дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0 ;

б) если число $np-q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и k_0+1;

в) если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

Пример 1.24 Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, $n=15$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 \le np+p\ .$$

Подставив данные задачи, получим

$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$, или $13{,}5 < k_0 < 14{,}4$.

Так как k_0 - целое число и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0=14$.

Пример 1.25 Найти наивероятнейшее число появления герба в задаче 2.4.

Решение. $np-q$= 10· 0,5 – 0,5 = 4,5 – дробное число; существует одно наивероятнейшее число k_0 . Имеем $4{,}5 \le k_0 \le 5{,}5$. Следовательно, $k_0=5$. Нетрудно заметить, что расчеты проведенные в п.2. это подтверждает, т.е., наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5) \approx 0{,}25$.

4. Полиномиальная схема. Более сложная схема с n независимых испытаний получается, когда при каждом испытании возможно появление одного из r попарно несовместных $A_1, A_2, ..., A_r$ исходов $(A_1+A_2+\dots++A_r=\Omega)$. Пусть $p_1, p_2, ..., p_r -$ вероятности этих исходов, тогда $p_1+p_2+\dots+p_r=1$. Полагая $P_n(m_1, m_2, ..., m_r) -$ вероятность того, что A_1 произошло ровно m_1 раз, A_2 произошло ровно m_2 раз, и т.д., A_r произошло ровно m_r раз (нетрудно убедиться, что $m_1+m_2+\dots+m_r=1$) имеем

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_r) = \frac{n!}{m_1!m_2!.....m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_r^{m_r} \qquad (1.16)$$

Формула (1.16) носит називание полиномиальной; описанная схема независимых испытаний с r исходами также называется полиномиальной. При $r=2$ эта схема превращается в биномиальную схему Бернулли.

5. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Формула Бернулли $P_n(k)=C_n^k\ p^k\ q^{n-k}$, выражающая $P_n(k)$ через n и p в схеме Бернулли, становится неудобной при больших n: в этом случае затруднение вызывает вычисление C_n^k .

5.1. Существует удобный в практическом отношении способ вычисления вероятностей $P_n(k)$ - приближенный, но достаточно точный при больших n. Его описание дано в следующей теореме.

Теорема 2 (локальная теорема Муавра - Лапласа). Пусть p отделена от нуля и от единицы. Тогдапри больших значениях nв схеме Бернулли справедливо приближенное равенство

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \tag{1.17}$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Комментарии к теореме 2.

1) Локальная теорема Муавра-Лапласа является глубоким математическим фактом, ее доказательство связано с использованием нетривиальных и тонких построений.

2) Функция $\varphi(x)$,упоминаемая в теореме, затабулирована: таблицы значений этой функции приведены в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция четная; ее график называется нормальной или гауссовой кривой и изображен на (рис. 1.4).

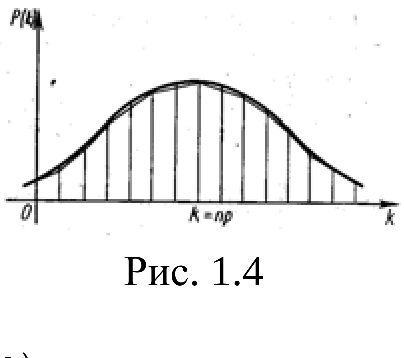


Рис. 1.4

3) Заметим, что $P_n(k)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Наибольшая из вероятностей $P_n(k)$ достигается при $k\approx np$ (k - ближайшее к np целое число). В этом случае

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}\ .$$

Пример 1.26Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты герб выпадет: а) ровно 50 раз; б) ровно 60 раз.

Решение.а) Здесь $n=100$, $k=50$, $p=0{,}5, q=0{,}5$. Используя формулу (1), получим

$$P_{100}(50)=\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\varphi(x)=\varphi(x)\cdot\frac{1}{5},\ \text{где } x=\frac{50-0{,}5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=0\ .$$

Следовательно, $P_{100}(50)=\frac{1}{5}\cdot\varphi(0)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}3989=0{,}079$ (значение $\varphi(0)$ найдено по таблице, см. приложение 1)

б) Аналогично находим $P_{100}(60)=\frac{1}{5}\varphi(x)$, где $x=\frac{60-0{,}5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}\cdot 0{,}5}}=\frac{10}{5}=2.$

Таким образом, $P_{100}(60)=\frac{1}{5}\varphi(2)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}0540=0{,}0108.$

Из формулы (1.17) вытекает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с графиком функции $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, k-целое число. Это означает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с гауссовской кривой $y=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$, сдвинутой вправо на np и сжатой по вертикали в $\sqrt{npq}$ раз, При чем график $P_n(k)$ обладает характерной чертой - наличием пика в точке $k\approx np$ (рис. 1.4). В учебниках по теории вероятностей можно встретить более строгую формулировку локальной теоремы Муавра - Лапласа.

5.2. Вычисление вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ в схеме Бернулли по формуле $P_n(k)=C_n^k\ p^k=q^{n-k}$ при больших nявляется еще более затруднительным, чем использование формулы Бернулли для вычисления $P_n(k)$. Заметим, что в практическом отношении вероятности $P_n(k_1,k_2)$ имеют большее значение, чем $P_n(k)$. Действительно, при больших n часто бывает не столь существенным знать то обстоятельство, что событие A произойдет ровно k раз, но важно знать, что количество наступлений этого события будет находиться в заданных пределах. Так, при проверке семян на всхожесть не столь важно знать, что из выбранных 1000 семян ровно 907 окажутся всхожими, но важно знать, что всхожесть семян находится в пределах от 900 до 950.

Как отмечалось выше, вероятности $P_n(k)$ при больших nмалы. Вероятности $P_n(k_1,k_2)$ могут быть сколь угодно близки к единице.

Удобный приближенный способ вычисления вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ в схеме Бернулли дает следующая теорема.

Теорема 3 (интегральная теорема Муавра - Лапласа). Пусть p отделена от нуля и от единицы. Тогда прибольших значениях n в схеме Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(k_2') - \Phi(k_1'), \tag{1.18}$$

где $k_1' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $k_2' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Комментарии к теореме 3.

1) Функция $\Phi(x)$называется функцией Лапласа; она табулирована. Таблицы функции $\Phi(x)$даны в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция нечетная.

2) Отметим, что
$\Phi(x) = 0$, $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(3) = 0{,}4986$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Таким образом, если в формуле (1.18) положить $k_2' = 3$, $k_1' = -3$, то получим $P_n(k_1,k_2)$=0,9973.

Замечание. Часто в практических задачах когда p ***отделена от 0 и 1требуется, чтобы*** $npq > 10$**.**

Существует более строгая формулировка интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

Пример 1.27Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты количество гербов будет находиться в следующих пределах: а)[45;55]; б) [40;60]; в)[35;65].

Решение. Здесь $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $n = 100$, $\sqrt{npq} = \sqrt{100.0{,}5.0{,}5}$ =5.

а) $k_1' = \dfrac{45-50}{5}$ =-1, $k_2' = \dfrac{55-50}{5}$ =1; $P_{100}(45,55) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$
.

б) $k_1' = \dfrac{40-50}{5}$ =-2, $k_2' = \dfrac{60-50}{5}$ =2; $P_{100}(40,60) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$.

в) $k_1^/ = \dfrac{35-50}{5}$ =-3; $k_2^/ = \dfrac{65-50}{5}$ =3; $P_{100}(35,65) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0,9973$.

Из результатов вычислений видно, что вероятности рассматриваемых событий достаточно велики, в особенности последняя вероятность, равная 0,9973.

События, имеющие большую вероятность, называются практически достоверными.

В этом случае считается, что в результате опыта событие обязательно наступит. Насколько должна быть велика вероятность, чтобы событие считать практически достоверным? Это зависит от характера задачи: в любой ли задаче возможна замена случайного события практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверным содержит «элемент риска». Ясно, что в различных условиях допустимый риск различен. Все же часто останавливаются на вероятности 0,9973. Мы также примем за определение практически достоверного события такое случайное событие, вероятность которого не меньше, чем 2Φ(3)= 0,9973.

5.3. Рассмотрим схему Бернулли с большим количеством n испытаний; обозначим через σ число $\sqrt{npq}$. Из интегральной теоремы Муавра - Лапласа вытекает, что

$$P_n(np - 3\sigma,\ np + 3\sigma) = 0,9973. \quad (1.19)$$

Действительно, при $k_1 = np - 3\sigma$, $k_2 = np + 3\sigma$ имеем $k_1^/ = -3$, $k_2^/ = 3$ и $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0,9993$.

Формула (1.19) позволяет для каждой схемы Бернулли указать интервал (k_1, k_2) такой, что количество наступлений события A принадлежит этому интервалу с вероятностью 0,9973; иными словами, событие $k_1 \le m < k_2$ ***практически достоверно.*** Формула (1.19) называется правилом «трех сигм», а интервал (k_1, k_2), где $k_1 = np - 3\sqrt{npq}$, $k_2 = np + 3\sqrt{npq}$ - трехсигмовым интервалом.

Заметим, что трехсигмовый интервал оказывается удивительно узким. Если любому здравомыслящему человеку, не знакомому с теорией вероятностей, предложить угадать интервал, в который с практической достоверностью попадет количество наступлений событий при последовательных испытаниях, то, как правило, в ответе будет дан гораздо более широкий интервал.

Пример 1.28Некоторая система состоит из 10000 (независимых) элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна 0,5. Пусть n— количество вышедших из строя элементов системы. Найти трехсигмовый интервал.

Решение. Имеем n =10000, $p=0{,}5$, $q=0{,}5$, σ = $\sqrt{10000.0{,}5.0{,}5}=50$, $k_1=np-3\sigma=500-150$, $k_2=np+3\sigma=500+150$. Итак, с вероятностью 0,9973 можно утверждать, что количество вышедших из строя элементов находится в пределах 5000+150 (событие ***практически достоверное***).

В частности, если взять запас в 5000 элементов для замены вышедших из строя, то в 50% случаев этого запаса не хватит. Если же увеличить этот запас всего на 3%, т. е. взять 5150 элементов, то его хватит наверняка (т. е. с вероятностью большей, чем 0,9973). Оценка трехсигмового интервала этого примера «на глаз», («по здравому смыслу») приводит, как правило, к большому преувеличению истинного значения.

С помощью интегральной теоремы Муавра - Лапласа можно пояснить, почему и в каком смысле вероятность p события Aв одном испытании совпадает (приближенно) с частотой $\frac{m}{n}$ наступления события Aв nиспытаниях. Действительно, с вероятностью 0,9973 выполняется неравенство $np-3\sqrt{npq}<m<np+3\sqrt{npq}$, откуда после деления всех его частей на nполучим

$$p-3\sqrt{\frac{pq}{n}}\le\frac{m}{n}<p+3\sqrt{\frac{pq}{n}}\ .$$

Так как $3\sqrt{\frac{pq}{n}}\to\infty$ при$n\to\infty$, то частота $\frac{m}{n}$с практической достоверностью при большихn как угодно мало отличается от p .

Следствие. Используя интегральную теорему Муавра-Лапласа, легко можно получить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях в более общем случае, т.е. формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 1.29Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию $n=400, p=0.1, q=0.9, \varepsilon=0.03$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)$.

Пользуясь формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)\approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице значений функции Лапласа находим $2\Phi(2)=0{,}9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 1.30 Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0{,}1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью равной 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию

$$p=0{,}1;\quad q=0{,}9;\quad \varepsilon=0{,}03;\ P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9544.$$

Требуется найти n.

Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В силу условия,

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)=0{,}9544.$$

Следовательно, $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right)=0{,}4772$. По таблице значений функции Лапласа (смотреть приложение 2) находим

$$\Phi(2)=0{,}4772.$$

Для нахождения числа n получаем уравнение

$$0{,}1\sqrt{n} = 2.$$

Отсюда искомое число деталей $n = 400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95, 44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности p = 0,1 по абсолютной величине не более, чем на 0,03, т. е. относительная частота будет заключена в пределах от 0,07 (0,1—0,03=0,07) до 0,13 (0,1+0,03=0,13).

Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено от 28 (7% от 400) до 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28, либо больше 52.

Более строгая формулировка утверждения о близости частоты и вероятности дана в теореме Бернулли (один из вариантов закона больших чисел), которую рассмотрим в одном из последующих параграфов.

5.4. Представляет интерес схема Бернулли с малой вероятностью p появления события A в одном испытании и с большим количеством n испытаний. Пусть при большом n малая вероятность p такова, что $np = \lambda$, где λ - некоторое число*(npq<10)*. Вероятность $P_n(k)$ в такой схеме Бернулли описывается следующей теоремой.

Теорема 4 (теорема Пуассона). Пусть p близка к нулю или к единице так, что при $n \to \infty$, $\lambda = np$ почти постоянно и $p = \dfrac{\lambda}{n}$. Тогда в схеме Бернулли из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p, имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) \approx P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (1.20)$$

Комментарий к теореме 3. Обратим внимание на следующее обстоятельство: вероятность наступления события A ровно k раз не зависит от n, что выглядит неправдоподобно. Это можно объяснить так. Пусть n велико; увеличивая n в μ раз и уменьшая p во столько же раз (так что np не изменяется), мы в самом деле имеем $P_n(k, p) \approx$

$P_{\mu n}\left(k, \dfrac{p}{\mu}\right)$. Таким образом, независимость вероятности рассматриваемого события от n объясняется тем, что она вычислена в разных схемах Бернулли.

Теорему примем без доказательства.

Пример 1.31 Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию, n=100000, $p =$ 0,0001, $k=5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой (4). Найдём λ:

$\lambda = np =$ 100000·0,0001=10.

$$P_{100000}(5) = e^{-10}\frac{10^5}{5} = 10^5 \cdot \frac{0,000045}{120} = 0,0375.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8.Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.
2. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятность отказов каждого из элементов за время t одинакова и равна $p=1/2$. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента из восьми.
3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются).
4. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность выпадения герба:

а)от 4 до 6 раз; б)хотя бы один раз.

5. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть:

а) одну партию из двух или две из четырех; б) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти.

6. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей:

а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0.51.

7. Продукция предприятия содержит в среднем 5% брака. Найти вероятность того, что из 5 проверенных изделий 2 оказались бракованными.
8. На автобазе имеются 8 машин. Вероятность выхода на работу каждой из них равна 0.8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее шести автомашин.
9. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока равна 0.2. Найти вероятность того, что из шести телевизоров не более одного потребует гарантийного ремонта.
10. Монета брошена 20 раз. Найти наивероятнейшее число выпадения герба.
11. Игральная кость брошена 16 раз.Найти наивероятнейшее число выпадений очков, кратное трем.
12. Каждый студент в среднем с вероятностью 0.6 выполняет определенное задание за одну минуту.Какова вероятность того, что из 10 выполнявших задание студентов число успешно выполнивших равно 7.
13. Десять осветительных лампочек для елки включены в цепь последовательно. Вероятность для любой лампочки перегореть при повышении напряжения в сети равна 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при повышении напряжения в сети.
14. Пара одинаковых игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность следующих событий:

A ={сумма очков, равная 7, выпадает дважды},

B ={сумма очков, равная 7, выпадает по крайне мере 1 раз}.

15. (продолжение) В условиях предыдущей задачи найти вероятность событий:

C ={каждый раз выпадает сумму очков, большая 7},

D={ни разу не выпадает сумма очков, равная 12}.

16. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяет стандарту. Сколько нужно испытать деталь, чтобы с вероятностью не менее 0.95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?
17. Фабрика выпускает в среднем 70 % продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число

первосортных заключено между 652 и 760.

18. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность того, что отдельное дерево приживется равна 0.8.
19. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0.515, найти вероятность того, что среди 80 новорожденных 42 мальчика.
20. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10 % отклонений от принятого стандарта. Сколько стандартных клемм следует ожидать с вероятностью 0.0587 среди 400 клемм.
21. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0.3. Найти вероятность того, что при этом будет 8 попаданий.
22. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.
23. Найти вероятность того, что при 1000 подбрасываниях игральной кости четное число очков выпадет 700 раз.
24. В партии смешаны детали двух сортов: 80 % первого и 20 % второго. Сколько деталей первого сорта с вероятностью 0.0967 можно ожидать среди 100 наудачу взятых деталей, если выборка возвратная.
25. Монета брошена 45 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 15 раз.
26. Найти вероятность того, что при 690 бросаниях игральной кости число очков, кратных 3, выпадет 600 раз.
27. 20 % продукции предприятия составляет брак. Найти вероятность того, что число бракованных среди 400 деталей содержится между 40 и 90.
28. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T . Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0.98.
29. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,97. Какова вероятность того, что из 200 проверенных ровно 1 нестандартная.
30. Вероятность поражения цели из автоматического оружия равна 0.7. Найти вероятность того, что из 60 произведенных выстрелов число попаданий содержится между 20 и 40.
31. $p=P(A)=0.95$. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях собы-

тие A произойдет 60 раз.

32. Согласно технологии, вероятность обрыва нити в течении часа равна 0.2. Ткачиха обслуживает 100 ткацких станков. Найти вероятность того, что в течение часа не более чем на 30 станках произойдет обрыв нити.
33. $p = P(A) = 0.8.$ Найти вероятность того, что в 200 испытаниях событие A произойдет 125 раз.
34. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности следующих событий: A ={в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок}, B ={в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет сделано равно 7 ошибок}.
35. Вероятность рождения мальчик $p = 0,512$. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, вычислить вероятность события
 A ={среди 100 новорожденных будет 51 мальчик}, B ={среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек}, C ={разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не перевисит 10}.
36. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0.006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 30000 сум страховых и в случае поломки получает от компании 3 000 000 сум. Найти вероятность события: A ={по истечении года работы страховая компания потерпит убыток}.Найти вероятность события: B_m ={страховая компания получит прибыль не менее m сум}, если $m = 1000000000, 5000000000, 10000000000$.
37. Игральная кость подбрасывается 500 раз. Какова вероятность того, что частота выпадения шестерки окажется в интервале $\left(\frac{1}{6} - 0.5, \frac{1}{6} + 0.5\right)$.
38. Корректура в 500 страниц содержаний 1000 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток одной страницы текста и вероятность этого числа.
39. При испытании легированной стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна 0.01. Считая применимым

закон редких явлений (предельная теорема Пуассона), вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью $x = 0{,}95$ указанный эффект наблюдался по крайне мере 1 раз.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§2.1ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Описательный подход к понятию случайной величины.

Почти в каждом из примеров, с которыми мы встречались, дело обстояло таким образом, что в результате опыта возникало некоторое число. Например, при бросании игральной кости выпадало то или иное число очков, при обследовании партии готовых изделий обнаруживалось то или иное число единиц брака, при исследовании работы некоторого банка с клиентами наблюдалось определенное число посещающих клиентов в сутки. Следует сказать, что такое положение типично для теории вероятностей. Среди решаемых ею задач исключительно много таких, в которых исход опыта выражается некоторым числом X. При этом случайный характер исхода влечет за собой случайность числа X; это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом. Приведем несколько примеров.

1. Бросается игральная кость; X – выпавшее число очков.

2. Покупаетсяn лотерейных билетов; X – число выигрышей.

3. Электрическая лампочка испытывается на длительность горения; X – полное время горения лампочки.

4. Некто приходит на платформу станции метро, чтобы сесть в поезд;
X – время ожидания ближайшего поезда.

Чтобы все примеры подобного рода уложить в единую схему, введем понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной, связанной с данным опытом, называется величина, которая при каждом осуществлении этого опыта принимает одно из своих возможных значений, заранее неизвестное, (это зависит от случая).

Обычно случайные величины обозначаютсяпрописными латинскими буквами $X, Y, Z, ...,$ а их возможные значения - строчными латинскими буквами $x, y, z, ...$ или $x_1, x_2, ..., y_1, y_2...$ и т.д.

Каждой случайной величине X соответствует некоторое множество чисел. Это множество значений, которые может принимать величина X. Так как, в первом из наших примеров множество значений состоит из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, во втором – из чисел $0,1,2,\ldots,n$,в третьем – X может принимать (в принципе) любое неотрицательное значение, наконец в последнем примере множество значений есть отрезок$[0, m]$ числовой оси (поезда метрополитена следуют с интервалом вm минут).

Различные случайные величины могут иметь одно и то же множество возможных значений. Чтобы проиллюстрировать это примером, представим себе, что имеются две игральные кости, причем одна сделана из однородного материала, другая, скажем, склеена из двух кусков разной плотности. Обозначим через X число очков, выпадающих на первом кости, через Y – число очков на второй. Случайные величины X и Y имеют одно и то же множество возможных значений, а именно $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, однако ведут себя совершенно по-разному. Если много раз подряд бросать первую из костей, то частоты событий $\{X=1\}, \{X=2\}, ..., \{X=6\}$ будут близки к $1/6$; при многократном же бросании второй кости частоты событий $\{Y=1\}, \{Y=2\}, ..., \{Y=6\}$, будут совсем другими. Этот пример показывает, что знания одного лишь множества возможных значений недостаточно для описания случайной величины. Необходимо еще знать, как часто случайная величина принимает то или другое из своих возможных значений.

Определение. Любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется законом распределения случайной величины.

Мы будем рассматривать дискретные и непрерывные случайные величины. Наиболее удобными для изучения являются так называемые дискретные случайные величины.

2. Виды случайных величин.

Определение. Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями.

Множество возможных значений дискретной случайной величины конечно или счетное.

Примерами дискретных случайных величин с конечным числом значений могут служить:

число родившихся мальчиков в течение дня в населенном пункте;

число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени;

число производимых выстрелов при стрельбе по цели, если стрельба ведется до первого попадания – это пример дискретной случайной величины, которая принимает бесконечное, но счетное число значений.

Определение. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Множество возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно и сплошь заполняет некоторый промежуток числовой прямой.

Примерами непрерывных случайных величин, могут служить: детали, которые токарь обтачивает до заданного размера, дальность полета снаряда и др.

3. Распределение дискретной случайной величины.

Определение.Мы говорим, что задан закон распределения дискретной случайной величиныX, если указано конечное или счетное множество чисел (возможных значения) $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и каждому из этих чисел x_i сопоставлено некоторое положительное число p_i, причем сумма всех $p_1 + p_2 + ... + p_n + \cdots = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать аналитически, таблично и графически.

Пусть нам известны все возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X с их вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно. Заметим, что в результате испытания обязательно произойдет одно из единственно возможных и попарно несовместных событий $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ..., \{X = x_n\}$. Как известно, такие события образуют полную группу и их сумма есть достоверное событие, т.е. $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$

Запишем закон распределения случайной величины X формулой $P\{X = x_i\} = p_i; (i = 1, ..., n)$, или в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Если множество возможных значений случайной величины X счетное, то закон распределения случайной величины X записывается в виде такой таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	…	p_n	…

В целях наглядности закон распределения случайной величины можно задать графически.Для этогостроят полигонраспределения.Например, его называют также многоугольником распределениявероятностей случайной величины:

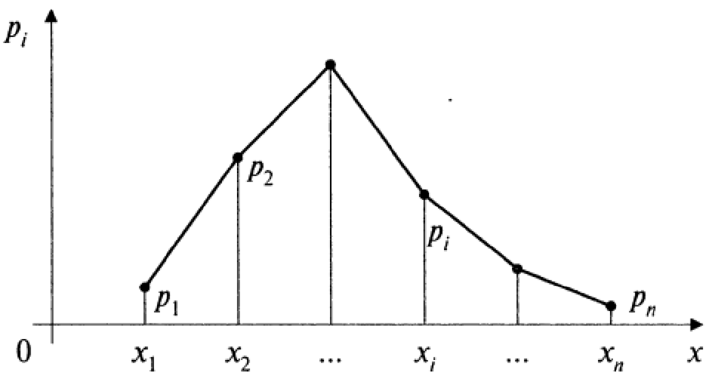


Рис. 2.1

Рассмотрим примеры дискретных случайных величин и законы их распределения.

Пример 2.1.Пусть случайная величина X – число очков, выпавших при одном бросании игральной кости. Составим закон распределения и полигон случайной величины X .

Решение. Величина X имеет 6 возможных значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность каждого из них одна и та же, и равна 1/6. Следовательно, закон распределения имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пример 2.2Монета брошена 3 раза. Случайная величина X - число появлений герба. Составить закон распределения X и построить ее полигон.

Решение.Вероятность появления герба в одном испытании $p=1/2$. Следовательно, вероятность противоположного события $q=1-p=1/2$. Возможные значения случайной величины X : $x_1=0$, $x_2=1, x_3=2$, $x_4=3$. Вероятности этих возможных событий найдем по формуле Бернулли

$$P_3(k)=C_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=C_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{для } k=0,1,2,3.$$

Так как $p_1=\frac{1}{8}, p_2=\frac{3}{8}, p_3=\frac{3}{8}, p_4=\frac{1}{8}$, то ряд распределения Xследующим образом.

X	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

§2.2 ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие функции распределения случайных величин.

Выше в качестве одного из способов задания дискретной случайной величины мы рассматривали закон ее распределения, представляющую собой ряд распределения или формулу, позволяющая находить вероятности любых значений случайнойвеличины X. Однако такое описание случайной величины X не является единственным, а главное, не является универсальным. Так, ононеприменимо для непрерывной случайной величины. Ниже приведем один из простых способов описания случайной величины X, разрешающий эту проблему. Он состоит во введении так называемой *функции распределения,* с помощью которойможно задать как дискретные, так и непрерывные случайные величины.

Каждой случайной величине X можно сопоставить некоторую функцию $F(x)$, определенную на всей числовой оси. При любом xзначение $F(x)$задается равенством

$$F(x) = P(X < x), \qquad (2.1)$$

т.е. вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Определение. Функцией распределения вероятностей (или просто функцией распределения)или интегральной функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшееx, т.е.:

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это означает, что $F(x)$есть вероятность того, что случайная величина примет значение, лежащее на числовой оси левее точки x.

2. Свойства функции распределения

$\mathbf{1^0}$.Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Доказательство:Свойство вытекает из определения функции распределения. Вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

$\mathbf{2^0}$. $F(x)$–неубываюшая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 \le x_2$.

Доказательство:Пусть $x_1 \le x_2$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно разделить на следующие два несовместных события:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда, $P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$, или $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$. Так как вероятность неотрицательна, то $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале(a,b)равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a); \qquad (2.2)$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Действительно, положим $a = x_1, b = x_1 + \Delta x$, тогда из формулы (2.2) получим:

$$P(x_1 \le X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \qquad (2.3)$$

Устремим Δx к нулю. Так как X – непрерывная случайная величина, то $F(x)$ – непрерывна. В силу непрерывности $F(x)$ в точке x_1 разность $F(x_1+\Delta x_1)-F(x_1)$ также стремится к нулю. Следовательно, $P(X=x)=0$.

3^0. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $F(x)=0$ при $x \le a$; $F(x)=1$ при $x>b$.

Следствие 3. Если возможные значения случайной величины расположены на всей оси OX, то справедливы следующие предельные отношения: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

4^0. $F(x)$ непрерывна слева при любом x.

3. Непрерывные случайные величины. Способы их задания.

Пусть дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	x_1	x_2	x_3	...
P	p_1	p_2	p_3	...

Формула $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} p_i$ дает полную информацию о функции $F(x)$. На рисунке изображен график этой функции для частного случая, когда X принимает только три значения: x_1, x_2, x_3. Можно при этом считать $x_1<x_2<x_3$. График представляет собой ступенчатую ломаную со скачками в точках x_1, x_2, x_3. Величины скачков равны соответственно p_1, p_2, p_3. Левее x_1, график совпадает с осью OX, правее x_3 совпадает с прямой $y=1$. Аналогичная ступенчатая ломаная будет получатся для любой дискретной случайной величины X.

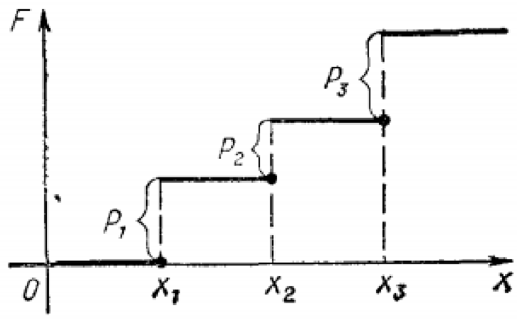


Рис. 2.1

Отсюда следует, что функция распределения дискретной случайной величины изменяет свои значения только скачками. Представляет интерес рассмотреть другой крайний случай – когда функция распределения вообще не имеет скачков т.е. является непрерывной функцией. Дадим определение непрерывной случайной величины.

Определение.Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна при всех значенияхx.

Принимая во внимание формулу

$$F(x_0+0)-F(x_0-0)=P(X=x_0) \tag{2.4}$$

доказанную в следствии 2, можно дать такое определение непрерывной случайной величины: *случайная величина непрерывна, если вероятность каждого ее отдельного значения равна нулю.*Нетрудно убедиться, что все данные определения непрерывной случайной величины - эквивалентны.

4. Случайные величины, имеющие плотность вероятности.

Существует простой способ построения примеров непрерывных случайных величин. Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию $f(x)$ определенную для всех значений x и удовлетворяющую условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1. \tag{2.5}$$

Положим

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{2.6}$$

Определенная таким образом функция $F(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения. Действительно:

1) $F(x)$не убывает – это вытекает из условия $f(x)\geq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$. Первое из этих равенств совпадает с условием (2.5), а второе вытекает из самой сходимости интеграла (2.5).

3) $F(x)$непрерывна слева. Этот факт следует из свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом.

Из сказанного вытекает, что функция $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины X. Так как при этом $F(x)$ непрерывна для всех значений x, то величина Xбудет непрерывной случайной величиной.

Рассмотренный выше способ построения непрерывных случайных величин позволяет дать следующее определение.

Определение. Будем говорить, что случайная величина X имеет плотность вероятности, если существует неотрицательная функция $f(x)$, такая, что для всех x справедливо равенство (2.6) (где $F(x)$ – функция распределения величины X).

Функция $f(x)$, фигурирующая в этом определении, называется *плотностью распределения* или *плотностью вероятности* величины X.

Очевидно, что случайная величина, имеющая плотность вероятности, непрерывна. Обратное верно не всегда: можно привести примеры непрерывных случайных величин, для которых не существует плотности.

Определение. Если распределение имеет плотность $f_X(x)$, то говорят, что случайная величина X имеет *абсолютно непрерывное распределение.*

5. Свойства плотности распределения.

Свойство 1. Плотность распределения – неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Построить многоугольник распределения.

2. В ящике содержится 5 белых и 25 черных шаров. Из ящика выбирается 3 шара. Случайная величина X – число белых шаров. Из числа выбранных составить закон распределения случайной величины X.
3. В ящике содержится 10 деталей, из них 8 – стандартных. Наудачу взято 2 детали. Составьте закон распределения числа стандартных деталей среди взятых.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

5.

а)

x_i	2	4	5	6
P_i	0.3	0.1	0.2	0.6

б)

x_i	10	15	20
P_i	0.1	0.7	0.2

Постройте многоугольник распределения.

6. Составьте закон распределения случайной величины X - числа выпадений герба при двукратном подбрасывании монеты и построить многоугольник распределения.
7. Два стрелка одновременно стреляют по мишени и делают по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0.5; для второго 0.4. Дискретная величина X - число попаданий в цель:

а) составить закон распределения дискретной случайной величины X;

б) построить многоугольник распределения.

8. Два стрелка поочередно стреляют по мишени. Вероятность промаха для первого стрелка равна 0.2; для второго 0.4. Произведено не более 4 выстрелов. Составить закон распределения дискретной величины X - числа выстрелов, произведенных до первого попадания.
9. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0.7; вторым 0.8. Сначала, сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками.
10. Считая вероятность рождения девочки и мальчика одинаковой, составить закон распределения случайной величины X – числа родившихся мальчиков среди 4-х новорожденных.
11. Три стрелка стреляют по мишени и делают по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.8; для второго 0.6; для третьего 0.5. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий в цель.
12. Из урны, содержащей 5 белых, 7 черных шаров извлекают 4 шара. X - число белых шаров в выборке. Составить закон распределения случайной величины X.
13. Две монеты подбрасываются по 3 раза. Составить закон распределения случайной величины X - числа выпадений «герба».

14. Устройство состоит из 4-х независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,3. Составить закон распределения числа отказавших элементов за время t.
15. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, извлекаются 5 шаров. Составьте закон распределения случайной величины X – числа извлеченных черных шаров.
16. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.9, для второго 0.8. Случайная величина X – суммарное число попаданий в мишень в данном эксперименте. Составить ряд распределения X.
17. Для сборки прибора требуется 4 однотипных деталей. Всего имеется 10 деталей, из которых только 6 являются доброкачественными. Наудачу отбирают 5 деталей (одну деталь «про запас»). X – число качественных деталей среди отобранных. Описать закон распределения X и найти вероятность того, что можно будет произвести сборку прибора.
18. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{если} \quad x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности $f(x)$.

19. Дана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{если} \quad x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

20. Дана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0 \\ 3\sin 3x, & \text{если} \quad \frac{\pi}{6}\le x<\frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{если} \quad x\ge\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

21. Дана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1 \\ x-\frac{1}{2}, & \text{если} \quad 1\le x<2 \\ 0, & \text{если} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

22. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X задана на всей оси равенством

$$f(x)=\frac{4C}{e^{x}+e^{-x}}.$$

Найти постоянный параметр C.

23. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X задана на всей оси равенством

$$f(x)=\frac{2C}{1+x^{2}}.$$

Найти постоянный параметр C.

24. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X в интервале $(0;\pi/2)$ равна $f(x)=C\cdot\sin 2x$. Вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

25. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0 \\ x^{2}, & \text{если} \quad 0\le x<1 \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех испытаний величина X точно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0.25; 0.75).

26. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2e^{-2x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,2).

27. Найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=0, \sigma=2$, примет значение, принадлежащее интервалу $(-2,3)$.

28. Дана функция плотности вероятности случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\leq 0 \\ A\sin x, & \text{если} \quad 0<x\leq\pi \\ 0, & \text{если} \quad x>\pi. \end{cases}$$

а) определить A; б) найти функцию распределения $F\ (x)$; в) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$.

29. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами распределения $a=20, \sigma=5$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала (15;25).

30. Случайная величина X на отрезке [0; 2] распределена по равномерному закону.

а) найти вероятность события $0<X<0.5$; б) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$.

31. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием, равным 50 мм. Фактически длина изготавливаемых деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм. Указание: из равенства $P(32<X<68)=1$ предварительно найти σ (по правилу трех сигм).

32. Измеряемая случайная величина X подчиняется закону распределения $N(10,5)$. Найти симметричный относительно a интервал, в который с вероятностью p попадает измеренное значение. Рассмотреть следующие числовые значения:

а) $p=0.9974$; б) $p=0.9974$; в) $p=0.50$.

§2.3 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА

1. Понятие числовые характеристики случайных величин.

Из §2.1известно, что исчерпывающей информацией ослучайной величине является ее закон распределения. Но далеко не в каждой задаче нужно знать *весь* закон распределения. В ряде случаев можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения, например числом, имеющим смысл *среднего значения* случайной величины, или же числом, характеризующим средний размер отклонения случайной величины от ее среднего значения, и т. д. Такого рода числа называют *числовыми характеристиками* случайной величины (или соответствующего закона распределения). Их роль в теории вероятностей чрезвычайно велика; многие задачи удается решить до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя только числовыми характеристиками. Наиболее важное место среди числовых характеристик занимает так называемое *математическое ожидание* (или *среднее значение)*случайной величины.

2. Математическое ожидание дискретных случайных величин.

Чтобы подойти естественным путем к понятию математического ожидания, будем рассуждать следующим образом. Пусть X – дискретная случайная величина и связана с некоторым опытом. Предположим, что опыт осуществлен N раз и при этом величина X:

N_1раз принимала значение x_1;

N_2 раз принимала значение x_2;…и т. д.

Найдем среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X в данной серии опытов. Оно запишется:

$$\frac{x_1N_1 + x_2N_2 \cdots}{N} = x_1\frac{N_1}{N} + x_2\frac{N_2}{N} + \cdots \tag{2.7}$$

Дробь N_1/N есть частота, с которой появлялось значение x_1; с увеличением числа опытов N эта дробь будет приближаться к p_1– вероятности события $\{X = x_1\}$. Аналогичным образом дробь N_2/N будет приближаться к p_2 и т. д. В итоге получаем, что с увеличением N среднее арифметическое будет приближаться к числу $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots$.

Определение. *Математическим ожиданием* или *средним значением* дискретной случайной величины X с законом распределения

Таблица 1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

называется число

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n. \qquad (2.8)$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений величины X на их вероятности.

Смысл числа $M(X)$ заключается в том, что *около числа $M(X)$ колеблется среднее арифметическое значений, принимаемых величиной X в больших сериях опытов*.

В случае, когда таблица 1 состоит из *бесконечного* числа столбцов и, значит, в правой части (2.8) стоит сумма бесконечного числа слагаемых, к определению математического ожидания мы добавим следующее требование: *ряд* (2.8) *должен сходиться абсолютно*. Другими словами, должен сходиться ряд

$$M\left(|X|\right)=|x_1|p_1+|x_2|p_2+\cdots$$

составленный из абсолютных величин членов ряда (2.8). Смысл этого требования очень прост. Если произвольным образом поменять местами столбцы таблицы 1, то измененная таблица будет по-прежнему задавать закон распределения величины X. В сумме (2.8) при этом произойдет перестановка слагаемых. Для того, чтобы число $M(X)$ оставалось неизменным, нужно, следовательно, потребовать, чтобы сумма ряда (2.8) не менялась при любой перестановке слагаемых.Как известно, таким свойством обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Число $M(X)$ часто называют *центром распределения* случайной величины X. Это название связано с *механической моделью* случайной величины. Если в точках $x_1, x_2, \ldots$ оси Ox сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots$, то центром масс такой системы является точка

$$\bar{x}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}$$

Предположив, что сумма всех масс равна 1, получаем: $\bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots$, что аналогично формуле для математического ожидания.

Пример 2.1 Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Обозначим указанную случайную величину через X. Ее закон распределения имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Отсюда

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Пример 2.2 В ящике находятся n запакованных изделий, каждое из которых с вероятностью p может оказаться дефектным. Из ящика необходимо выбрать исправное изделие. Для этого извлекаем из ящика наугад любое изделие, распаковываем его и подвергаем осмотру. Если при этом обнаруживается дефект, то извлекаем следующее изделие и т. д.

Рассматривается случайная величина X — число изделий, которое будет опробовано. Найти ее математическое ожидание.

Решение. Возможные значения для числа проб будут:

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

а их вероятности соответственно

$$1 - p,\ \ p(1-p),\ \ p^2(1-p), \ldots, p^{n-1}(1-p)$$

(например, вероятность события $\{X = 3\}$ будет $p^2(1-p)$, поскольку это событие означает, что из трех выбранных изделий первые два оказались дефектными, а третье - исправным). Отсюда

$$M(X) = 1 \cdot (1-p) + 2 \cdot p(1-p) + 3 \cdot p^2(1-p) + \cdots + n \cdot p^{n-1}(1-p)$$

Перемножив скобки и приведя подобные члены, будем иметь:

$$M(X) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}.$$

Смысл полученного результата можно пояснить следующим образом. Пусть имеется не один ящик, а большое число ящиков (в каждом по n изделий). Из каждого ящика с помощью некоторого числа проб выбирается исправное изделие. Если сложить все полученные таким образом числа и разделить на число ящиков, то должно получиться число, близкое к $\frac{1-p^n}{1-p}$.

3. Свойства математического ожидания.

В начале этой лекции говорилось о важной роли числовых характеристик при решении разного рода задач на случайные величины. Чтобы сделать аппарат числовых характеристик более эффективным, необходимо изучить их свойства. Из определения математического ожидания непосредственно вытекает следующий факт.

$\mathbf{1^0}$**.** Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

Действительно, постоянную величину c можно рассматривать как дискретную случайную величину X, принимающую только одно значение c с вероятностью 1. Но тогда $M(X)=c\cdot 1=c$.

$\mathbf{2^0}$**.** Постоянный множитель c можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(cX)=cM(X) \tag{2.9}$$

Для дискретной случайной величины равенство (2.9) очевидно: если X имеет закон распределения

X	x_1	x_2	....
P	p_1	p_2	....

то cX, будет иметь закон распределения:

cX	cx_1	cx_2	....
P	p_1	p_2	....

отсюда следует:

$$M(cX)=cx_1p_1+cx_2p_2+\cdots+cx_np_n+\cdots=c(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots)=cM(X).$$

$\mathbf{3^0}$**. Математическое ожидание суммы.** Наиболее существенным из всех свойств математического ожидания является следующий факт, который часто называют *теоремой сложения математических ожиданий.*

Теорема. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \tag{2.30}$$

Доказательство этой теоремы мы приведем для случая, когда система (X,Y) является системой *дискретного типа.*

Пусть $x_1, x_2, \dots$ –возможные значения величины X и $y_1, y_2, \dots$ – возможные значения Y. Возможные значения величины $Z=X+Y$ будут содержаться среди чисел z в виде x_i+y_j, причем

$$P(Z=z)=\sum_{\{i,j: x_i+y_j=z\}} p_{ij}, \tag{2.31}$$

где p_{ij} есть вероятность события $\{X=x_i, Y=y_j\}$.

Отсюда

$$M(Z)=\sum_z zP(Z=z)=\sum_{i,j}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i,j}x_i p_{ij}+\sum_{i,j}y_j p_{ij}=$$
$$=\sum_i x_i p_i+\sum_j y_j p_j=M(X)+M(Y).$$

Методом математической индукции формула (2.30) переносится на любое конечное число слагаемых:

$$M(X_1+X_2+\cdots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n).$$

Заметим, что доказанные выше свойства математического ожидания

$$M(cX)=cM(X) \text{ и } M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

называют обычно *свойствами линейности.* Оба свойства линейности можно записать в виде одной формулы:

$$M(aX+bY)=aM(X)+bM(Y), \ (a,b-const).$$

Рассмотрим следующую важную задачу.

Пример 2.3 Производится n независимых опытов. В каждом из них с одной и той же вероятностью p может появиться некоторое событие A. Требуется найти математическое ожидание случайной величины X – числа наступлений события A в n опытах.

Решение. Обозначим через X_i число наступлений события A в i -м опыте ($i=1,2,\dots,n$). Очевидно,

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

Закон распределения каждой из величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ один и тот же

Значения X_i	0	1
Вероятности	q	p

где $q=1-p$. Следовательно, $M(X_i)=0\cdot q+1\cdot p=p$ по теореме сложения математических ожиданий имеем:

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)=np.$$

4^0. Математическое ожидание произведения. Доказанная в предыдущем пункте формула (2.30) наводит на мысль о возможности аналогичной формулы для случайной величины $X\cdot Y$:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y) \qquad (2.32)$$

Однако формула (2.32) в общем случае неверна; чтобы в этом убедиться, достаточно взять в качестве X случайную величину с законом распределения:

X	-1	1
P	$1/2$	$1/2$

Тогда X^2 будет постоянной, равной величиной 1 и равенство $M(X^2)=M(X)\cdot M(X)$ уже выполняться не будет $(1\neq 0\cdot 0)$. В связи с этим вводится следующее определение:

Определение. Пусть случайные величины X и Y имеют распределения:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

и

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
P	q_1	q_2	$\cdots$	q_m

Говорят, что они независимы, если для любого $i=1,2,...,n$ и $j=1,2,...,m$ справедливо

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_iq_j.$$

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий, т. е.

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$$

Эту важную теорему часто называют *теоремой умножения, математических ожиданий.*

При доказательстве ограничимся случаем, когда система X и Y дискретного типа.

Доказательство. Возможные значения X обозначим, как и ранее через, $x_1, x_2, ...$, а возможные значения Y через $y_1, y_2, ...$.

Применив рассуждения, аналогичные при выводе формулы (2.30), получим равенство

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

где p_{ij} есть вероятность события $\{X = x_i, Y = y_j\}$. Ввиду независимости величин X и Y имеем:

$$P(X = x_i, y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad (2.33)$$

Обозначив

$$P(X = x_j) = r_i, P(\mathrm{Y} = y_j) = s_j,$$

перепишем равенство (2.33) в виде $p_{ij} = r_i s_j$.

Итак,

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \sum_{ij} x_i \cdot y_j \cdot r_i s_j.$$

Преобразуя полученное равенство, будем иметь:

$$M(X \cdot Y) = \left(\sum_i x_i r_i\right)\left(\sum_j y_j s_j\right),$$

что и требовалось получить.

4. Дисперсия дискретных случайных величин.

Различные случайные величины могут иметь одно и то же математическое ожидание. Рассмотрим, например, величины X и Y, законы распределения которых заданы таблицами вида:

X	-0.01	0.02
P	$2/3$	$1/3$

и

Y	-100	100
P	$1/2$	$1/2$

Математические ожидания этих величин совпадают (равны нулю),

$$M(X) = -0.01 \cdot \frac{2}{3} + 0.02 \cdot \frac{1}{3} = 0 \text{ и } M(Y) = -100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} + 0,$$

однако характеры распределений величин X и Y являются различными. В то время, как величина X может принимать лишь значения, мало отличающиеся от ее математического ожидания, значения величины Y значительно удалены от $M(Y)$.

Аналогичных примеров можно привести много. В двух различных географических местностях могут оказаться одинаковые средние уровни осадков, в двух учреждениях с различным соотношением низкооплачиваемых и высокооплачиваемых служащих может оказаться одна и та же средняя заработная плата и т. д.

Укажем еще один пример. Пусть имеются два различных прибора для измерения одной и той же физической величины. Практически результат измерения никогда не совпадает точно с измеряемой величиной: каждое измерение сопровождается случайной ошибкой. Обозначим ошибку при измерении первым прибором через X, вторым - через Y. Очевидно, X и Y случайные величины. Предполагая оба прибора исправными, будем иметь:

$$M(X)=0,\ M(Y)=0$$

(написанные равенства означают, что измерения свободны от систематической ошибки). Однако сам по себе этот факт еще не означает одинаковой точности обоих приборов. Вполне может быть, что для одного из приборов ошибка (по абсолютной величине) принимает в среднем большие значения, чем для другого.Другими словами один из приборов может оказаться более «разболтанным», давать большее рассеивание результатов измерения, чем другой.

Определение.*Дисперсией* случайной величины X называется число

$$D(X)=M(X-M(X))^2 \tag{2.34}$$

Другими словами, *дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения, случайной величины от своего математического ожидание.*

Величина

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{2.35}$$

носит название *среднего квадратического отклонения*случайной величины X. Если дисперсия характеризует средний размер квадрата отклонения, то число $\sigma(X)$ можно рассматривать как некоторую среднюю характеристику самого отклонения, точнее, величины $|X-M(X)|$.

Из определения (8) легко вытекают следующие два свойства дисперсии.

5. Свойства дисперсии.

$\mathbf{1^0}$. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Действительно, рассматривая постоянную величину c как дискретную случайную величину с единственным возможным значением c, получим:

$$D(c)=M(c-c)^2=0.$$

2^0. При умножении случайной величин X на постоянное число c ее дисперсия умножается на c^2.

Действительно,

$$D(cX)=M(cX-M(cX))^2=M\left(c^2\left(X-M(X)\right)^2\right)=c^2M\left(X-M(X)\right)^2=$$
$$=c^2D(X).$$

3^0. Формула для вычисления дисперсии.

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

4^0. Теорема сложения дисперсий. *Если величины X и Y независимы, то дисперсия их алгебраическойсуммы равна сумме их дисперсий:*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Пример 2.4 Найти дисперсию случайной величины X, подчиненной биномиальному закону распределения.

Решение.Воспользовавшись представлением X в виде $X=X_1+X_2+\cdots X_n$ (см. пример 3) и применяя теорему сложения дисперсий, получим:

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n).$$

Дисперсия любой из величин X_i, $i=1,2,...,n$ вычисляется непосредственно:

$$D(X_i)=M(X^2)-(M(X))^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Итак $D(X)=npq$.

6. Математическое ожидание случайной величины, имеющей плотность вероятности.

Определение. Пусть X - непрерывная случайная величина, распределенная с некоторой плотностью $f(x)$. Если сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx<\infty, \qquad (2.36)$$

то говорят, что существует $M(X)$,которое определяется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx. \qquad (2.37)$$

Другими словами, если интеграл (2.37) сходится абсолютно, то математическое ожидание величины X существует и равно этому интегралу.

Пример 2.5 Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.38)$$

Решение. Имеем:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

В последнем интеграле произведем замену переменной

$$\frac{x-a}{\sigma}=t.$$

Тогда получим:

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}dt}.$$

Первый из двух интегралов правой части равен нулю в силу нечетности подинтегральной функции, второй подстановкой $t=u\sqrt{2}$ сводится к $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$

В итоге получаем: $M(X)=a.$

Этим выяснен теоретико-вероятностный смысл параметра a, входящего в выражение для нормального закона: *параметр a совпадает с математическим ожиданием случайной величины X.*

Смысл второго параметра σ будет установлен позже.

Пример 2.6 Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$.

Решение. Имеем:

$$M(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx$$

Отсюда

$$M(X)=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Мы получили, таким образом, что числу $M(X)$ соответствует середина отрезка $[a,b]$.

7. Определение дисперсии и среднего квадратического отклонения непрерывных случайных величин.

Определение. Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от её математического ожидания.

Отсюда для абсолютно непрерывной случайной величины, распределенной с плотностью $f(x)$, получим

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx. \qquad (2.39)$$

После упрощения $M\left[\left(X-MX\right)^2\right]$, получим более краткую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2 \qquad (2.40)$$

а именно:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\right)^2 \qquad (2.41)$$

Аналогично

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

носит название *среднего квадратического отклонения* величины X. Если дисперсия характеризует средний размер квадрата отклонения, то число $\sigma(X)$ можно рассматривать как некоторую среднюю характеристику самого отклонения, точнее, величины $|X-M(X)|$.

Пример 2.7 Найти дисперсию случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

По формуле (2.41) имеем:

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Произведя замену $(x-a)/\sigma=t$, получим

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{pmatrix} du=te^{-\frac{t^2}{2}}dt\Rightarrow u=-e^{-\frac{t^2}{2}} \\ v=t\Rightarrow dv=dt \end{pmatrix}=$$

$$=\sigma^2\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

Интеграл, стоящий в правой части в скобках, равен $\sqrt{2\pi}$. Следовательно, $D(X)=\sigma^2$. Тем самым, выясняется смысл параметра σ в плотности распределения нормального закона, σ – есть среднее квадратическое отклонение величины X.

Пример 2.8 Найти дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$.

Воспользовавшись формулой (2.41), получим:

$$D(X)=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}.$$

Отсюда имеем:

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

8. Нормированные случайные величины.

Определение. Случайная величина Y называется *нормированной,* если ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице: $M(Y)=0,\ D(Y)=1$.

От любой случайной величины X можно перейти к нормированной случайной величине Y с помощью линейного преобразования: $Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$,

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение величины X от своего математического ожидания.

Выделим один частный случай. Для величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью (2.42), нормированность означает: $a=0,\ \sigma=1$. Следовательно, *в случае нормированного нормального закона плотность вероятности имеет вид:* $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и называется стандартным нормальным законом.

9.Определение моды и медианы.

Определение. Модой случайной величины X непрерывного типа называется действительное число m_X, определяемое как точка максимума плотности распределения вероятностей $f(x)$.

Мода случайной величины X дискретного типа определяется как такое возможное значение m_X, для которого

$$P(X=m_X)=\max_k P(X=x_k)$$

Таким образом, мода случайной величины дискретного типа есть ее наиболее вероятное значение в случае, если такое значение единственно.

Определение.Медианой случайной величины X непрерывного типа называется действительное число h_X, удовлетворяющее условию

$$P(X < h_X) = P(X > h_X),$$

т.е. корень уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина X примет, значение, меньше h_X или большее ее, одна и та же и равна 0,5.

Так как данное уравнение может иметь множество корней, то медиана определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Определение. Медианой случайной величины X дискретного типа называется наименьшее действительное число h_X, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} P(X \le h_X) \ge \dfrac{1}{2}; \\ P(X \ge h_X) \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отметим важное свойство медианы случайной величины: математическое ожидание абсолютной величины отклонения случайной величины X от постоянной величины C минимально тогда, когда эта постоянная C равна медиане h_X, т.е. $\min\limits_{C} M\left(|X - C|\right) = M\left(|X - h_X|\right)$

Определение.Квантиль порядка p случайной величины X называется наименьшее действительное число t_p, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} P(X \le t_p) \ge p; \\ P(X \ge t_p) \ge 1 - p. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X – число выпавших очков при одном бросании игральной кости. Найти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.
2. В урне 7 шаров, из них 4 белых, остальные черные. Из урны наудачу берут 3 шара. X – число взятых белых шаров. Найти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.
3. Две игральные кости одновременно бросаются 2 раза. X – число выпадений четного числа очков на обеих игральных костях. Найти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$ Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до

первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.25.

4. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составьте таблицу распределения числа бракованных изделий из 6 взятых наудачу деталей. Найти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.
5. X и Y – независимые случайные величины $D(X)=4,\ D(Y)=5$. Найти дисперсию случайной величины $Z=3X+3Y$.
6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны 2 и 10соответственно. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=2X+5$.
7. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	3	5	7	9
P	0.4	0.3	0.2	0.1

8. Случайная величина X распределена по биномиальному закону $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,...n$
   Найти $M(X)$ и $D(X)$
9. Стрелок стреляет до первого попадания. (Геометрическое распределение). Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна p. Найти математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов.
10. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, извлекаемся 4 шара. Случайная величина X – число извлеченных белых шаров.
    Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.
11. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимание рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго 0.8, для третьего 0.5, для четвертого 0.7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.
12. В партии из 8 деталей 5 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа стандартных деталей среди отобранных и найти $M(X)$ и $D(X)$.

13. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Y	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

Составить закон распределения случайной величины $X \cdot Y$ и проверить свойство математических ожиданий независимых случайных величин: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

14. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	2	4	5	
P	0	0	0	

Y	2	3	6	7
Р	0	0	0.	0.

Составить закон распределения их разности $X - Y$ и проверить свойство дисперсии $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найти $D(X)$ и $\sigma(X)$ для

X	4.3	5.1	10.6
P	0.2	0.3	0.5

16. Случайная величина X принимает только два возможных значения x_1 и x_2, $x_2 > x_1$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1, равна 0.6 $M(X) = 1.4$; $D(X) = 0.24$. Составить закон распределения случайной величины X.

17. Дискретная случайная величина X принимает два возможных значения x_1 и x_2, $x_1 < x$. Вероятность того, что случайная величина примет значение x_1 равна 0.2. $M(X) = 2.6, \sigma(X) = 0.8$. Составьте закон распределения случайной величины X.

18. Дискретная случайная величина X - число появлений события A в двух независимых испытаниях. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна, $M(X) = 1.2$. Найти $D(X)$.

19. Вероятность выхода из строя элементов некоторого устройства при

каждом испытании равна 0.9. Найдите дисперсию дискретной случайной величины X - числа отказов устройства при проведении 10 независимых испытаний.

20. Прибор состоит из пяти элементов. Отказ k-го элемента за время T независимо от остальных элементов происходит с вероятностью $p = 0.2 + (k-1)\cdot 0.1$ Определить:

а) математическое ожидание и дисперсию числа отказавших за время T элементов.

б) вероятность того, что за время T откажет хотя бы один из элементов прибора.

21. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{3x^2}{8} & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

22. Задана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}; \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти числовые характеристики $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

23. Задана функция плотности вероятности непрерывной случайной величиныX

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0.5, & 2 < x \le 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

24. Задана функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ 5e^{-5x}, & \text{если} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$..

25. Известно, что $M(X) = 3$, $D(X) = 13$. Найти функцию плотности вероятности непрерывной случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

26. Непрерывная случайная величина Xзадана функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0; \\ 2x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти $M(X), D(X)$ и $\sigma(X)$.

27. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty .$$

Найти $M(X)$.

28. Случайная величина X задана функцией плотности

$$f(x) = Ax^2 e^{-\lambda x}, \ (\lambda > 0, \ 0 \le x < \infty).$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

29. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X) = A + B \cdot arctgx - \infty < x < \infty .$$

Найти:

а) коэффициенты A и B;

б) функцию плотности вероятности $f(x)$;

в) $M(X)$.

30. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

31. Случайная величина X распределена равномерно. $M(X) = 4$, $D(X) = 3$.

Найти функцию плотности вероятности.

32. Случайная величина X распределена по закону распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти $M(X)$.

33. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 3x^2, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти $M(X)$.

34. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}A-e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A;

б) $M(X)$.

35. Случайная величина X подчинена закону распределения Лапласа:

$$f(x)=\frac{1}{22}e^{\frac{|x-a|}{2}},\ a>0.$$

где a - произвольное действительное число.Найти $M(X)$ и $D(X)$.

36. Случайная величина X имеет функцию плотности вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Axe^{-h^2x^2}, & x>0.\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент A;

б) $M(X)$ и $D(X)$.

37. Случайная величина X в интервале $(-a\,;\,a)$ задана функцией плотности $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$.Вне этого интервала $f(x)=0$.

Найти дисперсиюэтой случайной величины.

§2.4 НАИБОЛЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В этом параграфе описаны основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин, используемых для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений.

Начнем с дискретных распределений

1. Биномиальное распределение.

Пусть производится определенное число n независимых опытов. В каждом из них с одной и той же вероятностью p может наступить некоторое событие A.Рассматривается случайная величина X – число наступлений события A в n опытах. Тогда

ЗначенияX	0	1	2	…	$n-1$	n
Вероятности p_k	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(n-1)$	$P_n(n)$

где

$$P_n(k) = C_n^k (p)^k \cdot (q)^{n-k} (k = 0,1,2,...,n).$$

Это непосредственно следует из формулы Бернулли.

Определение.Закон распределения, характеризующийся приведеннойвыше таблицей, называют *биномиальным*.

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, распределенной по биномиальному закону:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np;$$

Также $M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np =$$

$$= n(n-1) p^2 + np.$$

Отсюда

$$D(X) = M(X^2) - M(X) = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = npq.$$

2. Распределение Пуассона.

Определение. Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, если ее ряд распределения имеет вид:

Значения X	0	1	2	...
Вероятности p_k	p_0	p_1	p_2	$\dots$

где $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Здесь λ – фиксированное положительное число (разным значениям λ отвечают разное распределения Пуассона).

Легко проверить, что

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = e^{\lambda} * \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, распределенной по закону Пуассона.

Для любого $\lambda > 0$ закон Пуассона задается в виде

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$$

Отсюда имеем

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-k} = \lambda e^{-k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-k} e^{k} = \lambda;$$

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^{-\lambda}}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda;$$

Следовательно, $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda;$

Таким образом, параметр $\lambda > 0$, есть не что иное, как математическое ожидание, которое совпадает с дисперсией случайной величины X.

3. Геометрическое распределение.

Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых с одной и той же вероятностью наступает событие A. Опыты продолжаются до первого появления события A, после чего прекращаются. Рассматривается случайная величина X – число произведенных опытов до первого появления события A Составим для нее закон распределения.

а) возможные значения случайной величины X это 1, 2, 3, …(бесконечно). Событие $\{X=n\}$ (n – любое натуральное число) означает, что в первых $n-1$ опытах событие A не наступает, а в n – м опыте наступает. Вероятность такого исхода равна:

$$\underbrace{(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n)}_{n-1\,раз}.p=pq^{n-1}$$

Где $q=1-p$. Следовательно, закон распределения величины X будет:

$$P\{X=n\}=pq^{n-1}.$$

Отсюда

$$M(X)=\sum_{N=1}^{\infty}npq^{n-1}=p\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)'=p\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

Аналогично

$$M(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2pq^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)pq^{n-1}=p\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)'-\frac{1}{p}=p\left(\frac{1}{1-q}\right)'-\frac{1}{p}=\frac{2p}{(1-q)^3}-\frac{1}{p}=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{q}{p^2}.$$

б) пусть теперь возможность проведения опыта конечно, т.е. после n опытов он прекращается независимо от того, что событиеA наступает или нет. Тогда

$$p\{X=k\}=pq^{k-1},\text{для } k=1,2,\dots,n-1$$

и

$$P\{X=n\}=pq^{n-1}+pq^{n+1}+...=pq^{n-1}(1+q+q^2+...)=q^{n-1}.$$

Вычислим

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kpq^{k-1}+nq^{n-1}=p\left(\sum_{k=0}^{n-1}q^k\right)+nq^{n-1}=\frac{1-q^n}{p}.$$

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2pq^{k-1}+n^2q^{n-1}$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2pq^{k-1}+n^2q^{n-1}-\left(\frac{1-q^n}{p}\right)=\frac{q}{p^2}+\frac{2q^n-q^{2n}}{p^2}-\sum_{k=n}^{\infty}k^2pq^{k-1}+n^2q^{n-1}.$$

Перейдем к непрерывным распределениям.

4. Закон равномерного распределения на отрезке.

Определение.Мы говорим, что случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$, если она имеет плотность вероятности следующего вида:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a\le x\le b;\\ 0, & \text{если} \quad x<a, \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a\le x\le b;\\ 1, & \text{если} \quad x>b.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2((b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

$$M(X^2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Следовательно,

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Закон нормального распределения на прямой.

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Определение.Мы говорим, что непрерывная случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения, если она имеет плотность вероятности следующего вида:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Это стандартная запись нормального закона распределения. У нормального распределения два параметра: a и σ, чей теоретико-вероятностный смысл состоит в том, что: $M\left(X\right)=a$ и $D\left(X\right)=\sigma^2$ (вычисления производить самостоятельно).

Нетрудно получить представление для функции распределения нормального закона.

$$\Phi_{a\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

и следовательно

$$P(a\le X\le b)=\int_{a}^{b}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

Если в последнем интеграле произвести замену $\frac{t-a}{\sigma}=y$, то получим

$$P(a\le X\le b)=\Phi_{a\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-b}{\sigma}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi_0\left(\frac{\beta-b}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ есть стандартный нормальный закон с функцией распределения

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

В частности, вероятность попадания в отрезок $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ равна:

$$\Phi_0(3)-\Phi_0(-3)=2\Phi_0(3)-1=0{,}997......$$

Как мы видим, эта вероятность отличается от 1на весьма малую величину.

Отсюда следует, что событие $a-3\sigma\le X\le a+3\sigma$ является практически достоверным, т.е. что практически возможные значения величины X расположены на отрезке $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. Этот факт носит название «правило трех сигм».

6. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определение. Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x\ge 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина, которая называется параметром распределения. Функция распределения (интегральная функция) показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x\ge 0,\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$M(X)=\lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx=\begin{pmatrix} du=\lambda e^{-\lambda x}dx \Rightarrow u=-e^{-\lambda x} \\ v=x \Rightarrow dv=dx \end{pmatrix}=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda};$$

$$M(X^2)=\lambda\int_0^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx=\begin{pmatrix} du=\lambda e^{-\lambda x}dx \Rightarrow u=-e^{-\lambda x} \\ v=x^2 \Rightarrow dv=2xdx \end{pmatrix}=$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2};$$

Отсюда

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить закон распределения случайной величины X - числа выпадений герба при двукратном подбрасывании монеты.
2. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза:
   а) написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X - числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях;
   б) построить многоугольник распределения.
3. В партии деталей имеется 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди отобранных.
4. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза:
   а) написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X - числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях;
5. В партии деталей имеется 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения числа нестандартных деталей среди отобранных.
6. Дискретная случайная величина X - число появлений события A в двух независимых испытаниях. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна, $M(X)$ =1.2. Найти $D(X)$.
7. Вероятность выхода из строя элементов некоторого устройства при каждом испытании равна 0.9. Найдите дисперсию дискретной слу-

чайной величины X - числа отказов устройства при проведении 10 независимых испытаний.

8. Вероятность попасть в самолет при выстреле из ружья равна 0.001. Произведено 3000 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий в самолет.
9. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25.
10. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время $T, p=0{,}005$ Найти вероятности следующих событий: A={за время T не выходит из строя ни один элемент}, B={за время T выходит из строя хотя бы один элемент}, C={за время T выходит из строя не более три элементов}.
11. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, ровно 120. Найти вероятности следующих событий: A={за две секунды на АТС не поступит ни один вызова}, B={за две секунды на АТС не поступит менее двух вызовов}, C={за три секунды на АТС поступит менее три вызовов}.
12. Случайная величина X на отрезке [0; 2] распределена по равномерному закону.
    а) найти вероятность события $0 < X < 0{,}5$;
    б) построить график функции $f(x)$ и $F(x)$.
13. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно на указанном интервале,
    а) найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания;
    б) вычислить вероятность того, что время ожидания превысит 3 мин.
14. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным 4. Найти вероятности следующих событий: $A=\{2 \le X \le 6\}, B=\{X \ge 8\}$.
15. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной по показательному закону с функцией плотности $f(x)=10e^{-10x}$, $x \ge 0$.

16. Величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0;\\ 0.4e^{-0.4x}, & \text{если} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

17. Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84г/см³(плотность кислоты нормально распределен). В результате статистических испытаний обнаружено, что практически 99,9% всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более, чем на 0,01 г/см³.

18. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40%значений больше 16,2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

19. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением σ. Считая, что для данной технологии $\sigma=5$ и X нормально распределена, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.

20. (продолжение). В условиях предыдущей задачи выяснить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98?

21. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940, если масса шоколадов нормально распределена?

§2.5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Случайныевекторы.Если случайное событие описывается упорядоченным набором действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, то этот набор представляет значение n-мерной случайной величины $\overrightarrow{X_n}=(X_1, X_2, ..., X_n)$. Можно также говорить о системе случайных величин или об n-мерном векторе. Каждое элементарное событие может рассматриваться как результат сложного испытания, состоящего в измерении всех величин $X_1, X_2, ..., X_n$, и интерпретироваться как точка *n*-мерного пространства $(X_1, X_2, ..., X_n)$ или как вектор $\overrightarrow{X_n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$.Каждая из величин $X_1, X_2, ..., X_n$ является случайной величиной(одномерной). Если говорят, что $\overrightarrow{X_n}$ -случайный вектор (или *n*-мерная случайная величина), то величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называют его случайными координатами.

2. Двумерные распределения вероятностей. Распределения координат случайной величины. Распределение системы двух случайных величин X_1, X_2 или двумерного случайного вектора $\overrightarrow{X_2} = (X_1, X_2)$ задается функцией совместного распределения

$$\Phi_{\overrightarrow{X_2}}(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2) = \mathrm{P}\{X_1 < x_1,\ X_2 < x_2\} \tag{2.43}$$

Каждая из случайных величин X_1 и X_2 (координаты случайного вектора) определяется соответствующей функцией распределения (одномерной)

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1) = P(X_1 < x_1) = P(X_1 < x_1, X_2 < \infty) = \Phi(x_1, \infty) \\ \Phi_2(x_2) = P(X_2 < x_2) = P(X_1 < \infty, X_2 < x_2) = \Phi(\infty, x_2) \end{cases} \tag{2.44}$$

(Координаты случайного вероятности X_1 и X_2 -независимы).

3. Дискретные и непрерывные двумерные распределения вероятностей.

Двумерная случайная величина (вектор) $\overrightarrow{X_2} = (X_1, X_2)$ называется дискретной если совместная вероятность выглядит следующим образом:

$$P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2) = P_{\overrightarrow{X_2}}(x_1, x_2) \tag{2.45}$$

и отлична от нуля только для счетного множества (спектра) точек (x_1, x_2) , т.е. если X_1 и X_2 являются дискретными случайными величинами. Распределения случайных координат X_1 и X_2 определяются вероятностями

$$\begin{cases} P_1(x_1) \equiv P(X_1 = x_1) = \sum\limits_{X_2} P(x_1, x_2) \\ P_2(x_2) \equiv P(X_2 = x_2) = \sum\limits_{X_1} P(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.46}$$

Двумерный случайный вектор $\overrightarrow{X_2} = (X_1, X_2)$ называется непрерывным (имеет непрерывное распределение вероятностей), если функция распределения $F(x_1, x_2)$ непрерывна всюду и если двумерная плотность распределения вероятностей

$$f_{\overline{x_2}}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.47}$$

существует и кусочно-непрерывна. Дифференциал $f(x_1, x_2)dx_1dx_2$ называется элементом вероятности. Спектр непрерывного двумерного распределения вероятностей есть множество точек, в которых плотность распределения (2.47) отлична от нуля. Распределения координат X_1 и X_2 определяются плотностями распределения

$$\begin{gathered} f_1(x_1) = \frac{dF_1(x_1)}{dx_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 \\ f_2(x_2) = \frac{dF_2(x_2)}{dx_2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 \end{gathered} \tag{2.48}$$

Отметим, что

$$\begin{cases} \sum\limits_{X_1}\sum\limits_{X_2} P(x_1, x_2) = \sum\limits_{X_1} P_1(x_1) = \sum\limits_{X_2} P_2(x_2) = 1 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x_2)\,dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)\,dx_2 = 1 \end{cases} \tag{2.49}$$

4. Математическое ожидание и моменты. Математическое ожидание (среднее значение) функции $g(X_1, X_2)$ двух случайных величин X_1 и X_2 определяется через их совместное распределение формулой

$$M\left(g\left(X_1,X_2\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x_1,x_2\right)dF\left(x_1,x_2\right)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{X_1}\sum\limits_{X_2} g\left(x_1,x_2\right)P\left(x_1,x_2\right) & \text{для дискретного распределения,}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x_1,x_2\right)f\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2 & \text{для непрерывного распределения,}\end{cases} \tag{2.50}$$

если эти выражения существует в смысле абсолютной сходимости.

Математические ожидания $M\left(X_1\right)=a_1,\ M\left(X_2\right)=a_2$ определяют точку $\left(a_1,a_2\right)$, называемую центром совместного распределения вероятностей (центром рассеяния). Величины $M\left(X_1-x_1\right)^{r_1}\left(X_2-x_2\right)^{r_2}$ называются моментами порядка r_1+r_2 относительно точки $\left(x_1,x_2\right)$. В частности, моменты порядка r_1+r_2 относительно начала (начальные моменты) и относительно центра распределения (центральные моменты) определяются соответственно формулами:

$$\alpha_{r_1r_2}=M\left(X_1^{r_1}X_2^{r_2}\right),\ \ \mu_{r_1r_2}=M\left(X_1-a_1\right)^{r_1}\left(X_2-a_2\right)^{r_2} \tag{2.51}$$

Центральные моменты второго порядка представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{11}=M\left(X_1-a_1\right)^2=D\left(X_1\right)=\sigma_1^2\\ \lambda_{22}=M\left(X_2-a_2\right)^2=D\left(X_2\right)=\sigma_2^2\end{aligned}\right\}-\text{дисперсии } X_1 \text{ и } X_2. \tag{2.52}$$

$\lambda_{12}=\lambda_{21}=M\left(X_1-a_1\right)\left(X_2-a_2\right)=\operatorname{cov}\left\{X_1,X_2\right\}$ (ковариация X_1 и X_2, или корреляционный момент, или смешанный момент 2-го порядка),

$r_{12}=r_{21}=r_{X_1,X_2}=\dfrac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}}}=M\left(\dfrac{X_1-a_1}{\sigma_1}\cdot\dfrac{X_2-a_2}{\sigma_2}\right)$ - коэффициент корреляции между X_1 и X_2).

Заметим, что

$$-1\le r_{12}\le 1,\ \lambda_{12}=M\left(X_1\cdot X_2\right)-a_1a_2=r_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{2.53}$$

5. Условные распределения вероятностей, связанные с двумя случайными величинами.Распределение системы двух случайных величин X_1и X_2 определяет условное распределение величины X_1 при $X_2 = x_2$и условное распределение величины X_2при $X_1 = x_1$. В случае дискретного совместного распределения эти условные распределения также являются дискретными и описываются условными вероятностями:

$$\left.\begin{aligned} P_{X_2=x_2}\left(X_1 = x_1\right) = \frac{P\left(x_1, x_2\right)}{P_2\left(x_2\right)} \\ P_{X_1=x_1}\left(X_2 = x_2\right) = \frac{P\left(x_1, x_2\right)}{P_1\left(x_1\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (2.54)$$

В случае непрерывного совместного распределения условные распределения величин X_1и X_2 также являются непрерывными и описываются условными плотностями распределений:

$$f_{X_2=x_2}\left(x_1\right) = \frac{f\left(x_1, x_2\right)}{f_2\left(x_2\right)}; \quad f_{X_1=x_1}(x_2) = \frac{f\left(x_1, x_2\right)}{f_1\left(x_1\right)};$$

Отметим, что

$$\sum_{X_1} P_{X_2=x_2}\left(X_1 = x_1\right) = \sum_{X_2} P_{X_1=x_1}\left(X_2 = x_2\right) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2=x_2}\left(x_1\right) dx_1 = \int_{\infty}^{\infty} f_{X_1=x_1}(x_2) dx_2 = 1.$$

Если дано дискретное или непрерывное распределение вероятностей системы двух случайных величин X_1и X_2, то условное математическое ожидание функции $g\left(X_1, X_2\right)$ при $X_1 = x_1$ есть

$$M_{X_1=x_1}\left(g\left(X_1, X_2\right)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{X_2} g\left(x_1, x_2\right) P_{X_1=x_1}\left(X_2 = x_2\right) \ \textit{для дискретного распределения} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x_1, x_2\right) f_{X_1=x_1}(x_2) dx_2 \ \textit{для непрерывного распределения} \end{cases}$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

Заметим, что $M_{X_1=x_1}\left(g\left(X_1,X_2\right)\right)$ есть функция от x_1.

6. n-мерные распределения вероятностей. Распределение системы n случайных величин $X_1, X_2,..., X_n$ или n-мерного вектора $\overrightarrow{X_n}$ задается $\mathrm{F}_{\overline{X_n}}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\mathrm{F}\left(x_1,x_2,...x_n\right)=\mathrm{P}\left(X_1<x_1,...,X_n<x_n\right)$

Распределение подсистемы $m<n$ величин $X_1, X_2,..., X_m$ есть m-мерное распределение (маргинальное распределение). Соответствующая m-мерная функция распределения получается из n-мерной путем подстановки $X_j=\infty$ для каждого из n-m аргументов x_j, которые не входят в выбранную подсистему, например:

$$\begin{aligned} &F(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,.....,\infty),\\ &F_2(x_2)=F(\infty,x_2,\infty,.....,\infty), \end{aligned} \quad \text{и т.д.}$$

n-мерная случайная величина $\overrightarrow{X_n}=(X_1,X_2,...,X_n)$ называется дискретной, если совместные вероятности

$$P_{\overline{X_n}}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=P\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=P\left(X_1=x_1,...,X_n=x_n\right) \tag{2.55}$$

отличны от нуля лишь для счетного множества точек $\left(x_1,...,x_n\right)$, т.е. если каждая из величин $X_1, X_2,..., X_n$ дискретна.

n-мерная случайная величина $\overrightarrow{X_n}=(X_1,X_2,...,X_n)$ называется непрерывной, если функция распределения $F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ непрерывна всюду и если плотность распределения вероятностей

$$f_{\overline{x_n}}(x_1,x_2,....,x_n)=f((x_1,x_2,....,x_n)=\frac{\partial F(x_1,x_2,....,x_n)}{\partial x_1,\partial x_2...\partial x_n} \tag{2.56}$$

существует и кусочно-непрерывна.

Дифференциал $f\left(x_1,...,x_n\right)dx_1...dx_n$ называется элементом вероятности. Спектр непрерывного распределения вероятностей есть множество всех точек $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, в которых плотность распределения (2.56) отлична от нуля.

7. Математическое ожидание и моменты. Математическое ожидание функции $g\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ от n случайных величин $X_1, X_2,..., X_n$

определяется формулой

$$Mg(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots., x_n)dF(x_1, \ldots., x_n)$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{X_1}\sum\limits_{X_2}\ldots\sum\limits_{X_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ *для дискретного распределения*} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \text{ *для непрерывного распределения,*} \end{cases}$$

если эти выражения существуют в смысле абсолютной сходимости.

n математических ожиданий $M(X_1) = a_1,\ M(X_2) = a_2, \ldots,\ M(X_n) = a_n$ определяют точку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которая называется центром распределения вероятностей. Величины $M(X_1 - x_1)^{r_1}(X_2 - x_2)^{r_2} \ldots (X_n - x_n)^{r_n}$ называются моментами порядка $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ относительно точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В частности, моменты относительно начала(начальные моменты) и относительно центра распределения(центральные моменты) определяются формулами:

$$\alpha_{r_1 r_2 \ldots r_n} = M\left(X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}\right)$$
$$\mu_{r_1 r_2 \ldots r_n} = M\left((X_1 - M(X_1))^{r_1}(X_2 - M(X_2))^{r_2} \ldots (X_n - M(X_n))^{r_n}\right)$$

Центральные моменты второго порядка представляют особый интерес и имеют специальные названия и обозначения:

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = M(X_i - a_i)(X_k - a_k) =$$
$$= \begin{cases} D(X_i) = \sigma_i^2 \text{ при } i = k \ (\text{дисперсия}) \ \left(i = \overline{1,n}; k = \overline{1,n}\right) \\ \operatorname{cov}\{x_i, x_k\} \text{ при } i \neq k \ (\text{ковариация}) \end{cases}$$

Эти моменты определяют матрицу моментов $[\lambda_{ik}]$. Ее определитель $\det[\lambda_{ik}]$ называется обобщенной дисперсией n-мерного распределения.

Коэффициент корреляции

$$r_{ik} = r_{X_i, X_k} = \frac{\lambda_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{kk}}} = M\left(\frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \cdot \frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right) \ \left(i, k = \overline{1,n}\right)$$

определяет корреляционную матрицу $[r_{ik}]$ n-мерного расширения, если только все $\sigma_i \neq 0$. Величину $\sqrt{\det(r_{ik})} = \dfrac{\sqrt{\det(\lambda_{ik})}}{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n}$ иногда называют коэффициентом разброса.

8. Примеры многомерных распределений

8.1. Полиномиальное распределение.

k-мерный случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ имеет полиномиальное распределение с параметрами $(n, p_1, p_2, ..., p_k)$ $(0 < p_i < 1, \sum_i p_i = 1)$, если

$$P\{\overrightarrow{\xi_k} = (m_1, ..., m_k)\} = P(\xi_1 = m_1, ..., \xi_k = m_k) = \frac{n!}{m_1!, ..., m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}$$

для $m = (m_1, m_2, ..., m_k)$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi\left(\overrightarrow{t_k}\right) = \varphi(t_1, t_2, ..., t_k) = \left(\sum_{l=1}^{k} p_l e^{-itl}\right)^n,$$

моменты $M\left(\overrightarrow{\xi_k}\right) = n\overrightarrow{p_k} = n(p_1, p_2, ..., p_k)$,

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i - M(\xi_i))(\xi_j - M(\xi_j)) = -np_i p_j, \ (i \neq j), D(\xi_i) = np_i(1 - p_i).$$

Полиномиальное распределение есть многомерный аналог биномиального распределения. Маргинальное распределение каждой из компонент вектора ξ есть биномиальное распределение.

Если $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(r)}$ - независимые *k*-мерные биномиальные случайные величины с параметрами $(n_1, p_1), (n_2, p_2), ..., (n_k, p_k)$ соответственно, то вектор $\xi = \sum_{l=1}^{r} \xi^{(l)}$ имеет полиномиальное распределение с параметрами

$$\left(\sum_{l=1}^{k} n_l p_l\right), \ \left(\overrightarrow{p_k} = (p_1, ..., p_k)\right).$$

Полиномиальное распределение является моделью случайного эксперимента, представляющего n независимых испытаний, исходом каждого из которых является событие одного из k непересекающихся классов; p_i, $(0 < p_i < 1)$ означает вероятность того, что результат любого испытания принадлежит i-му классу, причем $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

8.2. Равномерное распределение.

Пусть S – ограниченное борелевское множество в R^k. Обозначим через $mesS$ его k – мерную меру Лебега.

Случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ имеет равномерное распределение в S, если $mesS > 0$ и его плотность вероятности $f\left(\overrightarrow{x_k}\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ равна

$$f\left(\overrightarrow{x_k}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{mes}S}, & \overrightarrow{x_k} \in S, \\ 0, & \overrightarrow{x_k} \notin S \end{cases}$$

Представляет интерес частный случай, когда S – k- мерный параллелепипед

$S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$,

$$f\left(\overrightarrow{x_k}\right) = \begin{cases} \left(\prod_{l=1}^{k} (b_l - a_l)\right)^{-1}, & \overrightarrow{x_k} \in S, \\ 0, & \overrightarrow{x_k} \notin S \end{cases}$$

8.3. Двумерное нормальное распределение.

Двумерный случайный вектор $\overrightarrow{\xi_2} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет нормальное распределение, если его характеристическая функция $\varphi\left(\overrightarrow{t_2}\right) = \varphi\left(t_1, t_2\right)$ равна $\varphi\left(\overrightarrow{t_2}\right) = \exp\left\{i\left(m_1 t_1 + m_2 t_2\right) - 1/2\left(c_{12} t_1^2 + 2c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2\right)\right\}$, причем квадратичная форма $Q\left(\overrightarrow{t_2}\right) = Q\left(t_1, t_2\right) = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} t_i t_j$, $c_{12} = c_{21}$, неотрицательна, т.е. $Q\left(\overrightarrow{t_2}\right) \geq 0$ для любых действительных t_1, t_2. Если ранг квадратичной формы $Q\left(\overrightarrow{t_2}\right)$

равен 2, т.е. детерминант матрицы $C=\{c_{ij}, i, j=1,2\}$ отличен от нуля, то двумерное нормальное распределение называется невырожденным или собственным. Если ранг квадратичной формы $Q\left(\overrightarrow{t_2}\right)$ равен 0 или 1, то двумерное нормальное распределение называется вырожденным или несобственным.

Если случайный вектор $\overrightarrow{\xi_2}$ имеет невырожденное нормальное распределение, то его плотность $f\left(\overrightarrow{x_2}\right)=f\left(x_1,x_2\right)$ равна

$$f\left(\overrightarrow{x_2}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

где $\det C=C_{11}C_{22}-C_{12}^2=\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$.Смысл величин $M_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ и ρ следующий: $m_i=M(\xi_i)$, $\sigma_1^2=D(\xi_i), i=\overline{1,2}$,

$$\mu_{\xi_1\xi_2}=M(\xi_1\xi_2)=\sigma_1\sigma_2\rho_{\xi_1\xi_2}+m_1m_2,\ \rho_{\xi_1\xi_2}=\frac{M(\xi_1-m_1)(\xi_2-m_2)}{\sqrt{D(\xi_1)D(\xi_2)}}$$ – коэффициент корреляции компонент ξ_1 и ξ_2.

Плотность невырожденного двумерного нормального распределения удобно записывать в виде:

$$f\left(\overrightarrow{x_2}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q^{-1}\left(x_1-m_1,x_2-m_2\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[c_{11}^{-1}(x_1-m_1)^2+2c_{12}^{-1}(x_1-m_1)(x_2-m_2)+c_{22}^{-1}(x_2-m_2)^2\right]\right\}$$

где $Q^{-1}\left(\overrightarrow{t_2}\right)=Q^{-1}\left(t_1,t_2\right)=\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}^{-1}t_it_j$, $c_{12}=c_{21}$, c_{ij}^{-1} - элементы матрицы C^{-1}.

Маргинальные плотности нормального распределения: Следующие

$$f_{\xi_i}(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left\{-\frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\},\ i=1,2.$$

Условная плотность распределения компоненты ξ_1 при условии, что $\xi_2=a$,
равна 0.

$$f_{\xi_2=a}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x_1-m_1-\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(a-m_2)\right]^2\right\}$$

$$M_{\xi_2=a}(\xi_1)=m_1+\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(a-m_2)\,,M_{\xi_2=a}(\xi_1-m_1)^2=\sigma_1^2(1-\rho^2).$$

Плотность невырожденного нормального распределения сохраняет постоянное значение на эллипсах

$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)=\lambda^2$, называемых эллипсами равных вероятностей, причем вероятность попадания вектора $\overrightarrow{\xi_2}=(\xi_1,\xi_2)$ внутрь такого эллипса равна $1-e^{-\lambda}$.

Если двумерное нормальное распределение вырождено, то в случае, когда ранг квадратичной формы $Q(t_1,t_2)$ равен нулю, оно сосредоточено в точке , т.е. $P\{\xi=m\}=1$.

Если ранг квадратичной формы $Q\left(\overrightarrow{t_2}\right)$ равен единице, то нормальное $\vec{m}=(m_1,m_2)$ распределение сосредоточено на прямой, определяемой собственным вектором матрицы C, который соответствует ненулевому собственному значению.

8.4. Многомерное нормальное распределение.

Случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение, если его характеристическая функция $\varphi(\overrightarrow{t_k})=\varphi(t_1,t_2,...,t_k)$ имеет вид: $\varphi(\overrightarrow{t_k})=\exp\left\{i\overrightarrow{t_k}\cdot\overrightarrow{m_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{t_k}^T C\overrightarrow{t_k}\right\}$, где C – неотрицательно определенная симметрическая $k\times k$ матрица, $\overrightarrow{t_k}^T$ - транспонированный вектор-столбец $\overrightarrow{t_k}\in R^k$.

Если ранг матрицы (равен k, т.е. $\det C\neq 0$), то распределение называется

невырожденным или собственным. Смысл вектор $\overrightarrow{m_k}=(m_1,...,m_k)=$ $=(M(\xi_1),...,M(\xi_k))=M\left(\overrightarrow{\xi_k}\right)$, и матрицы $C=\{c_{ij},i,j=1,...,k\}=$

$=\left\{M\ (\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j), i, j = 1,\dots,k\right\} = M\ \left(\overrightarrow{\xi_k} - \overrightarrow{m_k}\right)\left(\overrightarrow{\xi_k}^T - \overrightarrow{m_k}^T\right)$ – ковариационная матрица.

Если случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k}$ имеет невырожденное нормальное распределение, то его плотность распределения $f_{\overrightarrow{\xi_k}}\left(\overrightarrow{x_k}\right) = f_{\overrightarrow{\xi_k}}\left(x_1, x_2, \dots, x_k\right)$ равна

$$f_{\overrightarrow{\xi_k}}\left(\overrightarrow{x_k}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det C}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m_k}\right)^T C^{-1}\left(\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m_k}\right)\right\}$$

8.5. Распределение Дирихле.

Случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет распределение Дирихле с векторным параметром $\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ $\left(\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,k}\right)$,

$$f_{\overrightarrow{\xi_k}}(x) = f_{\overrightarrow{\xi_k}}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k},\ \overrightarrow{x_k} \in S, \\ 0,\ \overrightarrow{x_k} \notin S, \end{cases}$$

где $S-$ $(k-1)$– мерный симплекс:

$$S = \left\{\overrightarrow{x_k} \in R^k : \sum_{i=1}^{k} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}\right\}.$$

моменты $\mu_{\overrightarrow{\xi_k}} = \dfrac{\overrightarrow{\alpha_k}}{\alpha_0}$, $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \dfrac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0(1-\alpha_0)}$, $D(\xi_i) = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_0}$, где $\overrightarrow{\alpha_k} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,

$\alpha_0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

8.6. Многомерное распределение Стьюдента (*t* - распределение).

Случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет t–мерное распределение Стьюдента с n степенями свободы, вектором сдвига $\overrightarrow{m_k}$ и матрицей точности T, если

$$f_{\overrightarrow{\xi_k}}(\overrightarrow{x_k}) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+n}{2}\right)\sqrt{\det T}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sqrt{(2\pi)^k}} \left[1 + \frac{1}{n}(\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m_k})^T T (\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{m_k})\right]^{-\frac{k+n}{2}},$$

где T – симметрическая положительно определенная матрица,ее моменты:

$$M\left(\overrightarrow{\xi_k}\right)=\overrightarrow{m_k},\ \operatorname{cov}(\xi)=M\left(\overrightarrow{\xi_k}-\overrightarrow{m_k}\right)\left(\overrightarrow{\xi_k}-\overrightarrow{m_k}\right)^T=\frac{n}{n-2}T^{-1},\ n>2.$$

Если $\overrightarrow{\eta_n}$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и невырожденной ковариационной матрицей $C=T^{-1}$, а ξ_0 имеет«хи-квадрат» распределение с n степенями свободы, то вектор $\overrightarrow{\xi_k}=(\xi_1,...,\xi_k)$, где $\xi_i=\frac{\sqrt{n}\eta_i}{\sqrt{\xi_0}}+m_i$, имеет k– мерное распределение Стьюдента с n степенями свободы, вектором сдвига $\overrightarrow{m_k}$ и матрицей точности T.

Если случайный вектор $\overrightarrow{\xi_k}$ имеет k– мерноераспределение Стьюдента с n степенями свободы, вектором сдвига $\overrightarrow{m_k}$ и матрицей точности T, то случайная величина $\zeta=\frac{1}{k}\left(\overrightarrow{\xi_k}-\overrightarrow{m_k}\right)^T T\left(\overrightarrow{\xi_k}-\overrightarrow{m_k}\right)$ имеет F-распределение с k и n степенями свободы.

Задачи для самостоятельного решения

1. По данным приведенным в таблице, найти выборочный коэффициент корреляции.

Y / X	-1	0	5	6
2	3	2	5	4
3	2	3	4	5
4	6	1	5	3

2. По данным приведенным в таблице, найти выборочный коэффициент корреляции.

Y / X	2	3	4	5	6
2	6	2	4	2	5
3	1	2	0	4	0
4	2	3	4	7	6

3. По данным таблицы найти условное среднее $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$.

Y \ X	3	4	5	6
2	5	3	1	4
3	1	2	2	5
4	0	4	5	3

4. По данным таблицы найти условное среднее $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$.

Y \ X	3	3,5	4	4,5	5
7	5/22	3/22	0	0	0
9	2/22	3/22	5/22	3/22	1/22

5. Найти коэффициент корреляции по данным таблицы:

Y \ X	-2	0	1	5	1
3	0,1	0	0,2	0,15	0,05
5	0,12	0,01	0,05	0,02	0,05
1	0	0,1	0	0,05	0,1

6. Найти коэффициент корреляции по данным таблицы:

Y \ X	8	2	6	4
10	0,1	0	0,2	0,15
2	0,05	0,12	0,1	0
7	0,05	0,1	0	0,01
5	0	0,05	0,02	0,05

7. По данным таблицы найти условное среднее $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$.

Y \ X	5	7	10
1	0,15	0,15	0,2
3	0,1	0,05	0,17
4	0,1	0,03	0,05

8. Даны совместное распределения случайных величин X и Y. Найти условное среднее Y при условии, что $X = 2$.

$X \backslash Y$	1	9	19
0	$\frac{12}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{1}{50}$
2	$\frac{2}{50}$	$\frac{25}{50}$	0

9. Дано совместное распределение случайных величин X и Y. Найти условное среднее X при условие, что $Y = 20$;

X \ Y	20	25	30	35	40
16	0,4	0,06	0,1	0,02	0,03
26	0,1	0,09	0,1	0,08	0,02

10. Дано совместное распределение случайных величин X и Y. Найти условное средней Y при условии, что $X = 140$.

X \ Y	5	10	15	20
100	0,04	0,02	0,01	0
120	0,02	0	0,06	0,02
140	0,03	0,02	0,1	0,2
160	0,01	0,12	0,02	0,02
180	0,14	0,10	0,02	0,05

11. По данным таблицы найти условное среднее $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$.

X \ Y	8	13	18	23	28	33	38
25	0,1	0,15	0,2	0,05	0,02	0,05	0
50	0,1	0,1	0,1	0	0,06	0,05	0,02

§2.6 ЗАКОН БОЛЬШИХЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

1. Постановка задач.

Как известно, предмет теории вероятностей, составляют закономерности, свойственные массовым случайным событиям. Простейшая из них – устойчивость частоты -лежит в основе всех приложений теории вероятностей к практике.

Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер, становится закономерным. Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждой из которых устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

В основе доказательств этих теорем лежит важное неравенство, установленное в 1845 г. П.Л.Чебышевым.

2. Неравенство Чебышева.

Пусть X – случайная величина с математическим ожиданием m. Выберем какое-либо положительное число ε и рассмотрим событие

$$|X - M| \geq \varepsilon \qquad (2.57)$$

Геометрический смысл этого события заключается в том, что значение случайной величины X попадает в интервал на числовой оси интервала от $m-\varepsilon$ до $m+\varepsilon$. С возрастанием ε эта область сужается, следовательно, вероятность попадания в нее (т.е. вероятность события (1)) становится все меньше. Неравенство Чебышева замечательно тем, что устанавливает для этой вероятности весьма простую оценку.

Теорема 1. Пусть X неотрицательная случайная величина имеет математическое ожидание. Тогда для любого $\varepsilon>0$справедливо соотношение

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}. \qquad (2.58)$$

Следствие 1. Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание. Тогда для любого $\varepsilon>0$ справедливо

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{M(|X|)}{\varepsilon}. \qquad (2.59)$$

Следствие 2. Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание и дисперсию. Тогда для любого $\varepsilon>0$справедливо

$$P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|\right)>\varepsilon\leq\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2} \qquad (2.60)$$

3. Различные формы закона больших чисел.

Определение. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ последовательность случайных величин. Говорят, что справедлив закон больших чисел, если среднее значение этих случайных величин утрачивает случайный характер, т.е. для любого $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\to 0. \quad \text{при } n\to\infty \qquad (2.61)$$

Неравенство Чебышева позволяет доказать ряд важных теорем, объединенных общим названием «закон больших чисел». Основная из этих теорем принадлежит самому П.Л.Чебышеву.

Теорема 2(Чебышев). Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимые, причем дисперсии их равномерно ограничены. Тогда каково бы ни было положительное постоянное число $\varepsilon>0$справедливо соотношение

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\to 0. \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (2.62)$$

Доказательство.Положим,

$$S_n=\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}.$$

В силу свойств математического ожидания имеем:

$$M(S_n)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}.$$

Далее, так как величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и дисперсии их равномерно ограничены, то

$$D(S_n)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n}\leq\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Сопоставив полученное неравенство с неравенством Чебышева получим:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Это показывает, что с увеличением n вероятность события $\left|S_n-M(S_n)\right|\geq\varepsilon$ стремится к нулю.

Смысл теоремы Чебышева можно пояснить следующим примером. Пусть требуется измерить некоторую физическую величину m. В силу неизбежных при измерении ошибок результат измерения будет случайной величиной. Обозначим эту величину через X. Ее математическое ожидание будет совпадать с измеряемой величиной m, а дисперсия равна некоторой величине D (характеризующей точность измерительного прибора). Произведем n независимых измерений и обозначим: X_1 – результат первого измерения, X_2 – результат второго измерения и т.д.

Совокупность величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ представляет собой систему независимых случайных величин, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и сама величина X. Среднее арифметическое S_n этих величин тоже является, конечно, случайной величиной. Однако с увеличением n эта величина почти перестает быть случайной, она все более приближается к постоянной m. Точная количественная формулировка этой близости и дается как раз теоремой Чебышева; она состоит в том, что событие $|S_n - m)| \le \varepsilon$ становится как угодно достоверным при достаточно большом n.

Из теоремы Чебышева в качестве следствия можно получить другую важную теорему, которая впервые была доказана Я.Бернулли и опубликована в 1713 году.

Теорема 3(Бернулли). Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p может наступить некоторое событие A. Рассмотрим случайную величину ν_n – число наступлений события A в n опытах. Каково бы ни было положительное число ε, вероятность события

$$\left|\frac{n_n}{n} - p\right| < \varepsilon$$

стремится к единице при $n \to \infty$.

Иначе говоря, как бы ни было мало ε, с увеличением числа опытов становится сколь угодно достоверным тот факт, что частота наступления события A отличается от вероятности этого события меньше, чем на заданную ε.

Чтобы вывести теорему Бернулли из теоремы Чебышева, достаточно заметить, что $\nu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где X_i есть число наступлений события A в
i – м опыте ($i = 1, 2, \ldots,$). Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют один и тот же закон распределения:

Значения X_i	0	1
Вероятности P	q	p

(где $q=1-p$); значит
для каждой из них математическое ожидание $M(X_i)$ равно:

$$0\cdot q+1\cdot p=p,$$

а дисперсия

$$D(X_1)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)\cdot p=pq.$$

Таким образом, все условия теоремы Чебышева выполняются, и для среднего арифметического величин $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е. для $\frac{v_n}{n}$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\left|\frac{v_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Попутно убедимся в справедливости следующего факта.

$$M\left(\frac{v_n}{n}\right)=\frac{M(v_n)}{n}=\frac{np}{n}=p,$$

$$D\left(\frac{v_n}{n}\right)=\frac{D(v_n)}{n^2}=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n},$$

Применив неравенство Чебышева к случайной величине $\frac{v_n}{n}$, получим

$$P\left(\left|\frac{v_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n}.$$

Мы получаем, таким образом, оценку, хотя и весьма грубую, для вероятности того или другого отклонения частоты события A в серии из n опытов от вероятности события A в одном опыте.

4. Центральнаяпредельнаятеорематеориивероятностейдля сумм независимых случайных величин.

До сих пор мы говорили об устойчивости средних характеристик большого числа опытов, точнее, об устойчивости сумм вида

$$S_n=\frac{X_1+X_2+...X_n}{n}. \quad (2.63)$$

Однако не следует забывать, что величина S_n – случайная, а значит, она имеет некоторый закон распределения. Оказывается, – и этот замечательный факт составляет содержание другой группы теорем, объединяемых общим названием «центральная предельная теорема», – что при весьма общих условиях закон распределения S_n близок к нормальному закону, так как величина S_n лишь постоянным множителем отличается от суммы

$$X_1+X_2+...X_n.$$

Сначала приведем центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 4 (центральная предельная теорема). Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, одинаково распределены и $M(X_i)=a$, $D(X_i)=\sigma^2$, то

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{X_1+X_2+...X_n-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x). \tag{2.64}$$

При некоторых условиях центральная предельная теорема имеет место также и для неодинаково распределенных независимых слагаемых. Ниже приведем такую теорему в условиях Ляпунова.

Пусть теперь случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n...$ независимые и не обязательно имеющие одинаковые распределения:

$$M(X_k)=a_k, D(X_k)=\sigma^2{}_k, M\left(\left|X_k-a_k\right|^3\right)=c^3{}_k$$

$$\text{и } A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k, B^2{}_N=\sum_{k=1}^{n} b^2{}_k, C^3{}_N=\sum_{k=1}^{n} c^3{}_k,$$

Теорема 5 (Ляпунова). Если $X_1, X_2, ..., X_n$ независимые случайные величины, a_k, b_k, c_k конечны и $C_n/B_n \to 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\frac{X_1+X_2+...X_n-A_n}{B_n}<x\right)=\Phi(x). \tag{2.65}$$

5. Применение центральной предельной теоремы.

Допустим, что производится измерение какой-либо физической величины. На результат измерения влияет огромное количество случайных факторов, таких, как колебание атмосферных условий, сотрясения измерительного прибора, усталость наблюдателя и т.п. Каждый из этих факторов, взятый в отдельности, порождает ничтожную ошибку X_k в измерении данной величины. Результирующая ошибка ν будет, следовательно, суммой огромного числа малых случайных величин X_k; и хотя закон распределения каждой из этих величин нам неизвестен, тем не менее можно утверждать заключить, что вся сумма ν будет иметь закон распределения, близкий к нормальному.

При математической обработке результатов измерений исходят из следующего постулата: случайная ошибка измерения подчиняется нормальному закону распределения. Из двух параметров этого закона один, а именно математическое ожидание, равен нулю. Второй параметр – среднее квадратическое отклонение – характеризует в известном смысле точность измерений.

Другой важный пример, иллюстрирующий роль нормального распределения в приложениях теории вероятностей, дает массовое производство, существующее во многих отраслях современной промышленности. В процессе массового производства изготовляются большие партии однотипных изделий. Все наиболее существенные характеристики выпускаемых изделий должны, естественно, соответствовать определенному стандарту. Однако в действительности наблюдаются отклонения от стандарта, которые порождаются причинами случайного характера (следует учесть, что выпуск изделия связан, как правило, с большим числом операций, некоторые из них не могут быть выполнены абсолютно точно). Каждая из этих причин сама по себе порождает лишь ничтожную ошибку X_k, но, складываясь, такие ошибки могут давать вполне ощутимые отклонения от стандарта. И здесь, так же, как в случае ошибок измерений, имеются все основания считать, что суммарное отклонение от стандарта следует нормальному распределению.

Подобных примеров можно привести очень много из самых различных областей науки и техники. Они объясняют, почему нормальный закон так часто возникает в задачах прикладного характера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(x)| < 0.2$ если $D(X) = 0.004$.
2. Дано: $P(|X - M(\text{X})| < \varepsilon) \geq 0.9$ и $D(X) = 0.009$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.
3. В некоторой местности средняя скорость ветра равна 16 км/с. Оценить вероятность того, что при однократном наблюдении скорость ветра не превысила 80 км/с.
4. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет выключена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время T окажется меньше трех.
5. В населенном пункте ежедневное потребление воды в среднем со-

ставляет 50 000 литров. Оценить вероятность того, что суточное потребление воды не превзойдет 150 000 литров.

6. Для случайной величины X, $M(X)=1$, $\sigma(X)=0.2$. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить неравенство $0.5 < X < 1.5$.
7. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания менее чем на три среднеквадратических отклонений (Правило «Трех сигм»).
8. $D(X)=0.004$. Пользуясь неравенством Чебышева, оцените вероятность неравенства. $|X - M(X)| < 0.2$.
9. Случайная величина X задана законом распределения:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Оценить $|X - M(X)| < 0.2$.

10. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, задана законом распределения $(n \geq 2)$:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{n^2}$	$1-\frac{2}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

11. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ задана законом распределения:
12. Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева:

X_n	$-a$	a
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

13. Последовательность независимых величин $X_1, X_2, ..., X_n$ задана законом распределения($n \geq 1$):

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Применима ли к заданной последовательности теорему Чебышева?

14. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ задана законом распределения

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Можно ли применить к заданной последовательности теорема Чебышева?

15. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X_n	3	5
P	0.6	0.4

Оценить $P(|X - M(X)| < 0.3)$.

16. $D(X)=0.002$. Оценить неравенство $|X - M(X)| < 0.2$ на основании неравенства Чебышева.
17. Известно, что $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0.9$, $D(X) = 0.006$. Пользуясь неравенством Чебышева найти ε.
18. В некоторой местности средняя скорость ветра 20 км/ч. Оценить вероятность того, что при однократном наблюдении скорость ветра не превзойдет 100 км/ч.
19. В некоторой местности в среднем 75 солнечных дней. Оценить вероятность того, что в течении года солнечных дней будет не более 200.
20. Случайная величина X имеет характеристики $M(X)=1, \sigma=0{,}2$. Оценить снизу вероятности события $A=\{0.5 \leq X < 1.5\}$, $B=\{0.75 \leq X < 1.35\}, C=\{X \geq 2\}$.
21. Число X солнечных дней в году для данной местности является

случайной величиной со средним значением 100 дней и среднеквадратичным отклонением 20 дней. Оцените сверху вероятность событий $A=\{X\geq 120\}, B=\{X\geq 150\}$.

22. Вероятность рождения мальчика $p=0.512$. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, вычислить вероятность события

    $A=${среди 100 новорожденных будет 51 мальчика}

    $B=${среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек}.

23. Отдел технического контроля проверяет качество наудачу отобранных 900 деталей. Вероятность p того, что деталь стандартна, равна 0.9. Случайная величина X – число стандартных деталей в партии. Найти наименьший интервал, симметрично относительно $M(X)$, в котором с вероятностью, не меньшей 0.9544, будет заключено число стандартных деталей.

24. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.975, утверждать, что частота выпадения герба попадает в интервал (0.4,0.6)?

    а) получить оценку указанного числа, используя неравенство Чебышева;

    б) получить оценку указанного числа, считая применимой интегральную теорему Муавра-Лапласа.

25. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3:2. Производятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением, причем каждый раз фиксируется цвет вынутого шара. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0.9948, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины $\varepsilon=0.05$?

    а) получить оценку указанного числа извлечений, используя неравенство Чебышева;

    б) получить оценку указанного числа извлечений, считая применимой интегральную теорему Муавра-Лапласа.

26. Случайная величина X – результат измерения некоторой физической величины, закон распределения которой неизвестен. Определить, какую максимально возможную относительную точность измерения можно гарантировать с вероятностью, не меньшей 0.95, если $M(X)=0.1, \sigma(X)=0.02$ и

а) проводится одно измерение;

б) проводится 5 измерений и в качестве результата берется среднее арифметическое измеренных значение;

в) проводится 100 измерений и в качестве результата берется среднее арифметическое измеренных значений с условием, что применима центральная предельная теорема.

27. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ. Показать, что предельной формой закона распределения стандартизированной случайной величины $Z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ при $\lambda \to \infty$ является нормальный закон $\mathrm{N}(0,1)$.

ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§3.1 ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

1.Введение.

Математическая статистика - раздел математики, в которомизучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующихзакономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей.Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайныеявления. Связующим звеном между ними являются предельные теоремы теории вероятностей. При этом теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального процесса, а математическаястатистика устанавливает свойства математической модели, исходя изданных наблюдений (говорят «из статистических данных»).

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: упорядочить,представить в удобном для обозрения и анализа виде. Затем оценить, хотя бы приблизительно,интересующие нас характеристики наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценкунеизвестной функции распределения, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен, и т.д.

Одной из важнейших задач математической статистики являетсяразработка методов, позволяющих по результатам исследования выборки (т. е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака (случайной величины X) изучаемых объектов для всей генеральной совокупности, из которой извлечена выборка.

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики используются для принятия решения (в задачах планирования, управления, прогнозирования и организации производства, при контроле качества продукции, при выборе оптимальноговремени настройки или замены действующей аппаратуры и т.д.), т.е.для научных и практических выводов.

Говорят, что «***математическая статистика - это теория принятия решений в условиях неопределенности***».

Элементыматематической статистика видны в работахЯ. Бернулли, П. Лапласа, они получили дальнейшее развитие в работах К. Пирсона. В ее современном развитии определяющую роль сыграли труды Г. Крамера, Р. Фишера, Ю. Нейманаи др. Большой вклад в математическую статистику внесли русские ученые П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденкои другие.

2. Задачи математической статистики.

Задачами математической статистики являются:

- указание способов сбора и группировки статистических сведений;
- разработка методов анализа статистических данных, зависящих от целей исследования.

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Рассмотрим некоторую конечную совокупность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, характеризующую исход изучаемого эксперимента. Обычно в этих случаях говорят, что эксперимент состоит в проведении n испытаний, а X_i-случайная величина,описывающая i-тое испытание.

Совокупность наблюдаемых случайных величин $\overline{X_n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ называется выборкой, а сами величины X_i – элементами выборки, а их число n – ее объемом.Реализация выборки $\bar{X}_n$ обозначается $x_1, x_2, ..., x_n$.В большинстве случаев и реализация, и сама выборка обозначаются одними и теми же буквами.

Часто возникают ситуации, когда компоненты $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и распределены так же, как и некоторая случайная величина Z. В таких случаях множество возможных значений Z с функцией распределения $F(x)$ называют *генеральной совокупностью* , имеющей-функцию распределения $F(x)$.

Наблюдаемые значения выборки при проведении эксперимента можно выбрать двояко:

– повторный, т.е. каждый отобранный элемент совокупности возвращается обратно;

– бесповторный, т.е. отобранный элемент обратно не возвращается.

Далее, элементы выборки должны правильно представлять генеральную совокупность т.е. если все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попадания в выборку, то такая выборка называется *репрезентативной*.(представительной)

На практике применяются различные способы отбора.

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части:

– простой случайный бесповторный отбор;

– простой случайный повторный отбор

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части:

– типичный отбор;

– механический отбор;

– серийный отбор.

Простым случайным называется такой отбор, при котором объекты извлекаются наугад, по одному из всей генеральной совокупности.

Типичным называют отбор, при котором объекты выбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее типической части.

Механическим называется отбор, при котором генеральная совокупность «механически» делится на столько групп, сколько, элементов должно войти в выборку и из каждой группы выбирается один элемент.

Серийным называется отбор, при котором элементы отбираются из генеральной совокупности не по одному, а «сериями» которые подвергаются сплошному обследованию.

3. Вариационный ряд и порядковые статистики.

Первым этапом обработки данных является составление вариационного ряда.

Вариационный ряд – это ряд, расположенный в порядке возрастания элементов выборки: $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$, где $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ – порядковые статистики выборки; при этом $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ – крайние элементы вариационного ряда называются минимальным и максимальным порядковыми статистиками соответственно.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка и для полученной реализации составлен вариационный ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, причем $x_{(1)}$ наблюдалось n_1 раз, $x_{(2)} - n_2$ раз и т.д. n- объем выборки. Наблюдаемые $x_{(i)}$ называются вариантами, n_i- частотами, $\frac{n_i}{n}$- относительными частотами. Случайная величина $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ называется *размахом* выборки.

4. Эмпирическая функция распределения.

Статистическим распределением называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

По статистическому распределению можно построить эмпирическую функцию распределения.

Определим для каждого действительного x случайную величину μ_n, равную числу элементов выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, значения которой не превосходят x, т.е. $\mu_n = \textit{число}\{n; X_n < x\}$ и положим $F_n(x) = \frac{\mu_n}{n}$

Эта функция называется эмпирической функцией распределения наблюдаемой случайной величины Z. При этом, если Z имеет функцию распределения $F(x)$, то ее называют *теоретической* функцией распределения.

Для каждой реализации $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ функция распределения $F_n(x)$ однозначно определена и обладает всеми свойствами функции распределения: изменяется от 0 до 1, не убывает и непрерывна слева.

Эмпирическая функция распределения играет фундаментальную роль в математической статистике. Важнейшее ее свойство состоит в том, что при увеличении числа испытаний над случайной величины Z происходит сближение этой функции с теоретической, т.е. по закону больших чисел $F_n(x) \to F(x)$ при каждом фиксированном x.

Все свойства функции распределения справедливы и для $F_n(x)$ характерны свойства $F(x)$:

1. значение эмпирической функции принадлежат отрезку $[0;\ 1]$;
2. $F_n(x)-$ неубывающая функция;
3. если $x_{(1)}$ самая маленькая варианта, то $F_n(x)=0$ для $x<x_{(1)}$, если $x_{(n)}$ самая большая варианта, то $F_n(x)=1$для $x>x_{(n)}$.

5. Полигон и гистограмма.

В целях наглядности строят различные графики статистических распределений.

Определение. Полигоном частот называют ломаную, отрезкикоторой соединяют точки

$$\left(x_i, n_i\right),\ i=\overline{1,n}$$

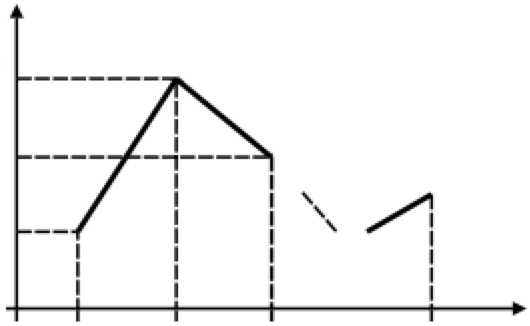
Для построения полигона необходимо расположить варианты $x_{(i)}$ на оси абсцисс, а на оси ординат соответствующие им значения частот $n_{(i)}$, затем соединив прямой точки $(x_{(i)}, n_{(i)})$ получим отрезки, составляющие сам полигон.

Определение.Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки

$$\left(x_i, n_i / n\right),\ i=\overline{1,n}$$

Если наблюдаемая случайная величина дискретна, то по построенным полигонам мы увидим, что случайная величина принимает отдельные значения с определенными частотами или относительными частотами.

$\frac{n_i}{n}$



x

Рис. 1

Пусть теперь наблюдаемая случайная величина непрерывна. Тогда при конечном числе экспериментов отдельные значения наблюдаются по одному разу. В этом случае используют гистограмму. Данные интервалы длиной h делятся на несколько интервалов, для каждого i –го интервала находят сумму частот вариант, попавших в данный интервал.

Другими словами, гистограмму строят в следующим образом. Область возможных значений наблюдаемой случайной величины разбиваем на равные интервалы длины

$$h=a_i-a_{i-1};[a_0,a_1],(a_0,a_1],...,(a_{m-1},a_m].$$

Рассмотрим τ_i – число элементов выборки попавших в интервал $(\alpha_{i-1},\alpha_i]$ и строим прямоугольник с высотой $\frac{\tau_i}{nh}$. Полученную фигуру называют гистограммой.

Гистограмму можно рассматривать как статистический аналог неизвестный плотности распределения наблюдаемой случайной величины.

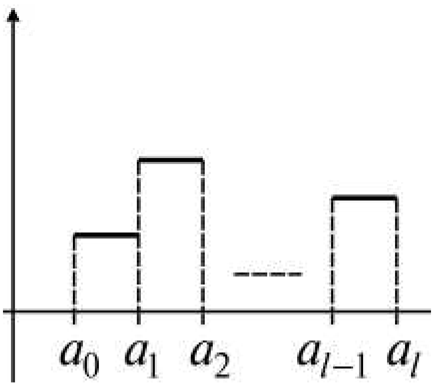


Рис.2

Задачи для самостоятельного решения

1.Для данной выборки: 2,1,3,3,4,4,3,3,3,2,3,1,1,2,3,3,4,2,2,3,3.

а) составить вариационный ряд,

б) составитьтаблицу частот,

в) построить полигон относительных частот.

2.Среди работников предприятия наудачу отобрано 20 человек и полученыследующие сведения об их тарифных разрядах:
1,2,4,6,3,4,4,2,6,3,5,3,3,1,5,4,2,5,4,3.

а) составитьстатическое распределение выборки и настройте полигон частот,

б) составитьэмпирическую функцию распределения.

3. По данному распределению частот составить распределение относительных частот

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

4. Построитьполигон частот и относительных частот по данному распределению выборки;

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

5.Выборка объема 30 задана в виде распределения частот:

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Найти распределение относительных частот.

6. По данному распределению выборки найти её эмпирическую функцию распределения

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

7. По данному распределению выборки построить полигон частот

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

8. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки

x_i	2	4	5	7	10
τ_i	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

9. По данному распределению выборки найти эмпирическую функцию

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

10. Построить полигон относительных частот по выборке:

x_i	20	40	65	80
τ_i	0.1	0.2	0.3	0.4

11. Построить полигон частот:

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

12. По данному распределению выборки построить гистограмму частот:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	относительные частоты
i	$(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$	n_i	$\frac{n_i}{n}$
1	[2,7]	5	
2	(7,12]	10	
3	(12,17]	25	
4	(17,22]	6	
5	(22,27]	4	

13. По приведённому распределению выборки построить гистограмму относительных частот:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	относительные частоты
i	$(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$	n_i	$\frac{n_i}{n}$
1	[0,2]	20	
2	(2,4]	30	
3	(4,6]	50	
		$n = \sum n_i = 100$	

14. По данному распределению объёма n=30 построить гистограмму частот и относительных частот:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	относительные частоты	Плотность относительные частоты
i	$(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$
1	$[5,10]$	2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	$(10,15]$	6	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	$(15,20]$	12	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	$(20,25]$	10	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$
		$n = 30$	$\sum \frac{n_i}{n} = 1$	

15. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала
i	$(\alpha_{i-1}, \alpha_i]$	n_i
1	$[2,5]$	6
2	$(5,8]$	10
3	$(8,11]$	4
4	$(11,14]$	5
		$n = 25$

16. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	8	9
τ_i	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1

17. На основании приведенных данных найти эмпирическую функцию:

x_i	2	5	7
n_i	3	2	5

18. Построить полигон относительных частот:

x_i	5	10	12	20
τ_i	0.1	0.2	0.3	0.4

19. По данному распределению выборки найти эмпирическую функцию и построить ее график:

x_i	3	7	8	10
n_i	5	2	3	10

В задачах 20-24 построить графики эмпирических функций распределения, гистограммы и полигоны частот для выборок, представленных статистическими рядами.

20.

x_i	5	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

21.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

22.

Гран. интервалов	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Частоты	1	2	7	18	12	8	2

23.

Гран. интервалов	(18,20]	(20,22]	(22,24]	(24,26]	(26,28]	(28,30]	(30,32]	(32, 34]
Частоты	4	3	3	2	4	7	12	5

24.По выборке:

1,9	3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	4,0
1,7	3,2	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	3,2
4,1	1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	3,1
1,5	1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	2,9
0,8	0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	2,1
3,2	2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	1,9
0,9	3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	1,1
2,1	3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	0,9

построить гистограмму и полигон относительных частот по этой выборке, предварительно сгруппировав данные. В качестве длины интервала взять следующие значения: а) $h = 0.3$; б) $h = 0.6$; в) $h = 1.2$.

§3.2 ПОНЯТИЕ СТАТИСТИКИ И ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СТАТИСТИЧЕСКИМ ОЦЕНКАМ

1. Понятие статистической оценки

Значение эмпирической функции распределения в каждой точке можно рассматривать в качестве оценки для значения в этой точке теоретической функции распределения, а различные выборочные характеристики (моменты, квантили и т. д.) - как оценки соответствующих характеристик генеральной совокупности. Следует отметить, что для выборок большого объема значительная разница между значениями реализации выборочных характеристик и значениями соответствующих теоретических характеристик маловероятна, и поэтому разумно (по крайней мере для больших выборок) принять выборочную характеристику за приближённое значение соответствующей теоретической характеристики, когда последняя неизвестна. Таким образом, в термин «оценка» вкладывается определённый асимптотический смысл. В тоже время в случае применения статистической теории на практике часто приходится строить приближённые значения для различных неизвестных теоретических характеристик изучаемой модели при любых объёмах выборки, в томчисле и ограниченных, и при этом обосновывать соответствующие рекомендации с точки зрения каких-либо критериев оптимальности. Общие методы решения подобных задач развиты в теории оценивания неизвестных параметров распределений.

Ниже приводится таблица, содержащая данные измерения роста 1000 школьников старших классов.

Интер.рост	Число школьн.
143-146	1
146-149	2

Интер.рост	Число школьн.
167-170	170
170-173	120

149-152	8
152-155	26
155-158	65
258-161	120
161-164	181
164-167	201
173-176	64
176-179	27
179-182	10
182-185	3
185-188	1

$$\sum n_i = 1000$$

Гистограмма, соответствующая этой таблице, показана на рисунке

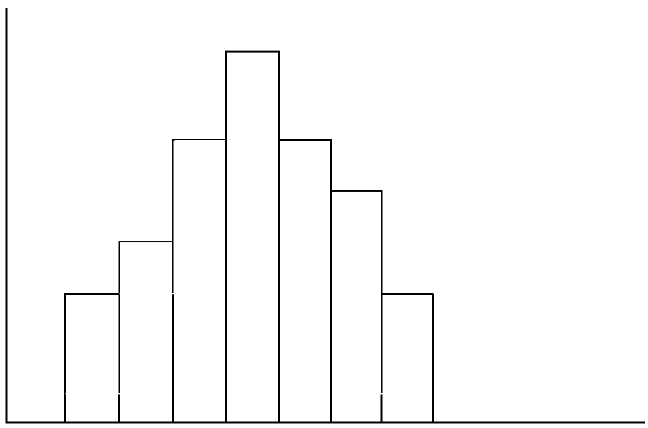


Рис. 3

По этой гистограмме, естественно предположить, что распределение случайной величины является нормальным. Из гистограммы

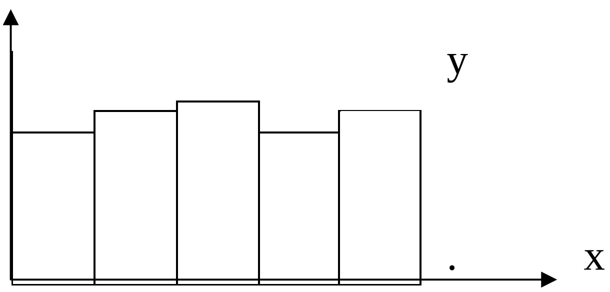


Рис. 4

напрашивается вывод, что наблюдаемая величина имеет равномерное распределение на отрезке [0;1].

На практике редко встречается, когда изучаемый нами закон распределения неизвестен «полностью». Чаще всего дело обстоит так, что вид закона распределения ясен заранее (из каких-либо теоретических соображений) и требуется найти только некоторые параметры, от которых он зависит.

Например, если заранее известно, что закон распределения случайной величины нормальный, то задача сводится к нахождению значенийдвух параметров a и σ (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение).

Рассмотрим среднее арифметическое элементов выборки, которое по закону больших чиселпри $n \to \infty$ стремится к математическому ожиданию:

$$\theta_n = X_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \to a. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что в качестве оцениваемого параметра a можем предложить среднее арифметическое элементов выборки, которое называется выборочной средней.

2. Понятия статистики и общие требования, предъявляемые к оценкам.

Введем следующее понятие.

Определение. Статистикой называется любая случайная величина, являющаяся функцией от выборки $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Итак, в вышеприведенном примере в качестве оценок параметра a и σ^2 нормального распределения предлагаем статистику средней арифметической элементов выборки $(X_1, X_2, ..., X_n)$– выборочную среднюю ивыборочную дисперсию соответственно.

Для того, чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Перечислим основные требования, которым должны удовлетворять предлагаемые оценки неизвестных параметров распределения.

3. Несмещенная оценка.

Определение. Несмещенной называют статистическую оценку θ_n, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки т.е. $M(\theta_n) = \theta$.

Определение.Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру. При этом разность $b_n(\theta) = M(\theta_n) - \theta$ называют смещением оценки θ.

Приведем примеры несмещенных оценок.Нетрудно доказать, что если выборка извлечена из генеральной совокупности с конечным r-м моментом $a(r)=(X^r)=\int x^r dF(x),$ то выборочный r -й момент $a_n(r)=\frac{1}{2}\sum X_j^r$ будет несмещенной оценкой $M\left(X^r\right)$. Действительно,

$$M(a_n(r))=\frac{1}{n}(M(X^r{}_1)+(M(X^r{}_2)+\ldots+M(X^r{}_n))=\frac{na(r)}{n}=a(r). \quad (3.2)$$

В частности, выборочная средняя есть несмещенная оценка математического ожидания $a=M(X)=\int XdF(x)$. Выборочная дисперсия $\sigma^2{}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_n)^2$ не является несмещенной оценкой дисперсии $\sigma^2=D(X)=\int(x-M(X))^2 dF(x)$, так как σ_n^2 можно представить в виде $\sigma^2{}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-(\overline{X_n}-a)^2$, Отсюда

$$M(\sigma^2{}_n)=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n} \quad (3.3)$$

поскольку

$$M(X_i-a)^2=\sigma^2, M(\overline{X_n}-a)^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

Равенство (3.3) дает нам возможность построить несмещенную оценку дисперсии

$$S^2{}_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2. \quad (3.4)$$

которая называется исправленной выборочной дисперсией.

Нетрудно заметить, что из несмещенности оценки s_n^2 для σ^2 не следует несмещенность оценки s_n для σ.

4. Состоятельная оценка.

Очень часто нас интересуют асимптотические свойства оценок θ_n для θ выборок $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ объема $n\to\infty$.

Определение. Если $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ бесконечная последовательность случайных величин, то говорят, что Z_n стремится по вероятности к Z (т.е. $Z_n \xrightarrow{p} Z$), каково если бы ни было положительное число ε

$$P\{|Z_n-Z|\geq\varepsilon\}\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Определение. Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n\to\infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Теорема 1. Если θ_n несмещенная оценка для θ и $D(\theta_n) \to 0$, то она состоятельна.

Действительно, из неравенства Чебышева имеем

$$P\{|\theta_n - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\theta_n)}{\varepsilon^2} \to 0. \qquad (3.5)$$

Из (3.5) и неравенства $|\theta_n - \theta| \leq |\theta_n - M(\theta)| + |M(\theta_n) - \theta|$ следует, что при $n \to \infty$ вероятность события $|\theta_n - \theta| \geq \varepsilon$ стремится к нулю, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 1 во многих случаях легко доказывается состоятельность оценок θ_n.

5. Оптимальность и эффективность оценок.

Пусть требуется оценить параметр θ в теоретической функции распределения $F_\theta(x)$ по статистической информации, доставляемой соответствующей выборкой $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Предположим, что в данной задачесуществуют несмещенные оценки, т.е. статистики $T_n = T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$,удовлетворяющие условию $M(T_n) = \theta$. Обозначим класс всех несмещенных оценок в данной задаче через F_θ. Далее, дополнительно предположим, что дисперсия всех оценок из класса F_θ конечны. В этом случае точность оценок можно измерять величиной их дисперсии, и мы получаем простой критерий сравнения различных оценок из класса F_θ. Пусть T_n^* и F_θ– оценки из класса F_θ. Если

$$D(T_n^*) \leq D(T_n) \text{ для любого } \theta \in \Theta, \qquad (3.6)$$

то по критерию минимума дисперсии оценка T_n^* равномерно (по параметру θ) не хуже оценки T_n. Если условие (3.6) выполняется для любой оценки $T_n \in F_\theta$, то T_n^* называется *несмещенной оценкой с равномерно минимальной дисперсией*.

Определение.Оптимальной называют статистическую оценку, которая (при заданном) объеме выборки имеет наименьшуюдисперсию

$$D(T_n^*) = \inf_{T_n \in F_\theta} \{D(T_n)\} \qquad (3.7)$$

Пример. Пусть $(X_1, X_2, ..., X_n)$– выборка из бернуллиевской модели $B(p)$. Требуется оценить неизвестный параметр p.

Здесь $M(\bar{X}_n) = p,$ поэтому выборочное среднее $\bar{X}_n$ является несмещенной оценкой. Более того, из неравенства Чебышева следует, что она и состоятельная. Чуть позже покажем, что в данном случае $\bar{X}_n$ имеет наименьшую дисперсию $D(\bar{X}_n)=\frac{p(1-p)}{n}$, т.е. она оптимальная.

Пусть как обычно $f_\theta(x)$ – плотность распределения наблюдаемой случайной величины X .Тогда величину

$$i(\theta)=\left\{\left(\frac{\partial\log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right\}=D\left(\frac{\partial\log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)$$

называют количеством фишеровской информации, содержащейся в одном наблюдении.

Теорема 2. (неравенство Рао-Крамера). Для любой несмещенной оценки θ_n справедливо неравенство

$$D(\theta_n)\geq\frac{1}{ni(\theta)}.$$

Определение. Если существует оценка θ_n, для которой нижняя граница Рао-Крамера достигается, то ее называют эффективной.

Эффективная оценка является и оптимальной.

Пример 3.1Пусть $(X_1,X_2,...,X_n)$ – выборка из нормального распределения с параметрами (a,σ), σ – известно. Так как

$$\log f_d=-\frac{(x-a)^2}{2\theta^2}-\log(\sqrt{2\pi}\theta)\text{ отсюда }\frac{\partial\log f_a(x)}{\partial a}=\frac{x-a}{\theta^2},\text{то}$$

$$ni(\theta)=n\frac{M(X-a)^2}{\theta^4}.\text{Для оценки } a_n=\bar{X}_n \text{ имеем } D(a_n)=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{ni(\theta)}\text{ т.е.}$$

в этом случай нижняя граница Рао-Крамера достигается. Оценка a_n - эффективная.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n=10$.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

2. По данному распределению выборки объема $n=10$ найти выборочную среднюю.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

3. Из генеральной совокупности произведена выборка объема $n = 50$.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

4. Дана таблица частот результатов работы 40 студентов.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

5.Найтивыборочную дисперсию по данному распределению выборки объема$n = 100$.

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

6. По данному распределению выборки объема $n = 50$найти выборочную дисперсию.

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

7. По данному распределению выборки объема $n = 50$найти выборочную дисперсию.

x_i	1	18.9	19.3	19.6
n_i	5	10	20	15

8. По выборке объема $n = 41$вычислена смещенная оценка генеральной дисперсии $\sigma_n^2 = 3$. Найти несмещенную оценку генеральной дисперсии.
9. Найтиисправленную дисперсию по распределению выборки объема $n = 10$

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

10. Найтивыборочную дисперсию по распределению выборки объема $n=10$.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

11. По данному распределению выборки объема $n=10$ найтивыборочную дисперсию.

x_i	23.5	26.1	28.2	30.4
n_i	2	3	4	1

12. По данному распределению выборки объема $n=10$ найтивыборочную среднюю и выборочную дисперсию.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

В 13-14 вычислить моду, медиану, среднее и дисперсию следующих выборок:

13. 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

14. 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3;

15. Сравнить полученные числовые результаты для выборок а) и б).
а) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 9;
б) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 12.

В задачах 16-18 определить среднее, моду, медиану и дисперсию группированных выборок.

16.

Границы интервалов	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
Частоты	1	2	4	2	1	1

17.

Границы интервалов	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Частоты	1	1	3	2	1	1

18.

Границы интервалов	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоты	8	14	40	26	6	4

19. Случайная величина X имеет распределение с плотностью

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{a-x}, & \text{если} \quad x \geq a; \\ 0, & \text{если} \quad x < a. \end{cases}$$

Для оценивания неизвестного параметра a по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наблюдений случайной величины X предлагается выбрать статистику

$$a_n = X_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

и проверить несмещенность и состоятельность этой оценки.

20. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение $R(0,1)$. Показать, что статистика- является

$$m_n = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} = \frac{1}{2}\left(\min_{1 \leq k \leq n} X_k + \max_{1 \leq k \leq n} X_k\right),$$

несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$.

21. Пусть θ_n – несмещенная оценка параметра θ, $D(\theta_n) < \infty$. Показать, что θ_n^2 является смещенной оценкой θ^2 и вычислить смещение.

22. Пусть $\theta_n = \theta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ является оценкой неизвестного параметра θ по выборке объема n. В качестве меры близости оценки θ_n к истинному значению θ выберем величину средней квадратической ошибки .

$$m((\theta_n-\theta))^2.$$

Показать, что $M((\theta_n-\theta)^2)=D(\theta_n)+(M(\theta_n)-\theta)^2$

23. Показать, что выборочная средняя является эффективной оценкой параметра λ распределения Пуассона.

24. Показать, что относительная частота появления события A в n независимых испытаниях является эффективной оценкой вероятности p появления события A в каждом испытания.

25. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности $N(a,\sigma)$. Найти информацию Фишера $I_n(\theta^2)$.

26(продолжение). В условиях предыдущей задачи при известном математическом ожидании a оценить дисперсию σ^2. Показать, что статистика

$$s^2{}_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+a)^2$$

является эффективной оценкой σ^2.

27. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – выборка из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение $R(0,1)$. Показать, что статистика

$$m_n=\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$$

является более оптимальной оценкой математического ожидания, чем выборочная средняя при любом объеме выборки.

§3.3МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

3.3.1 Метод моментов

Пусть случайная величина имеет распределение, принадлежащее семейству $P=\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ где Θ– некоторая область в R^d . Предложим, что существуют первые dмоментов распределения P_θ и положим:

$$m(\theta)=\int_X x^r P_\theta(dx), r=1,2,...,d.$$

Здесь X совпадает с R или X-счетное множество. Имея n независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над случайной величиной ξ, найдем выборочные моменты: $\overline{m_r} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^r{}_k$, $r=1,2,\ldots,d$.

Метод моментов состоит в приравнивании выборочных моментов теоретическим. Получаем систему уравнений $m_r(\theta) = \overline{m}_r$, $r = 1,2,\ldots,d$. относительно dнеизвестных $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^d$. Если существует единственное решение этой системы и функции f_r непрерывны, то получающаяся оценка $\left\{\theta_r^*, r = 1,2,\ldots,d\right\}$ является состоятельной оценкой параметра θ. Однако, вообще говоря, оценки, полученные методом моментов, неэффективны. Метод моментов при определенных условиях приводит к состоятельным оценкам, причем эти уравнения во многих случаях просты и их решение не связано с большими вычислительными трудностями.

Пример 3.2 (модель гамма, оценивание параметров методом моментов).

Рассмотрим модель гамма $\Gamma(\theta_1, \theta_2)$, когда оба параметра неизвестны (здесь $\Theta = \left\{\theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_i > 0, i = 1,2\right\}$.

Имеем $m_k = \int_0^\infty \frac{x^{\theta_2+k-1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} dx}{\Gamma(\theta_2)\theta_1^{\theta_2}} = \frac{\theta_1^k \Gamma(\theta_2 + k)}{\Gamma(\theta_2)} = \theta_1^k \theta_2 (\theta_2 + 1)\ldots(\theta_2 + k - 1)$,

где $\Gamma(\cdot)$-Г функция.

В частности, $m_1 = \theta_1\theta_2$, $m_2 = \theta_1^2\theta_2(\theta_2 + 1)$, откуда
$\theta_1 = \left(m_2 - m_1^2\right) / m_1, \quad \theta_1 = m_1^2 / \left(m_2 - m_1^2\right)$.

Окончательно имеем, что оценками параметров по методу моментов являются в данном случае статистики:

$$\tilde{\theta}_1(X) = \frac{A_{n2} - A_{n1}^2}{A_{n1}} = \frac{S^2}{\overline{X}}, \quad \tilde{\theta}_2(X) = \frac{A_{n1}^2}{A_{n2} - A_{n1}^2} = \frac{\overline{X}}{S^2}.$$

Отметим, что метод моментов неприменим, когда теоретические моменты нужного порядка не существуют (например, для распределения Коши). Оценки метода моментов часто используют только в качестве первых приближений, основываясь на которых можно находить последующие приближения с большей эффективностью.

Пример 3.3 Оценки параметров нормального распределения

А)Оценка среднего при известной дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n - n$ независимых наблюденных значений нормальной случайной величины ξ с плотностью распределения

$p(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ x \in R,$ где $\theta -$ неизвестный параметр, а параметр σ известен. Положим: $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$ Очевидно, что θ^* – нормально распределенная случайная величина с параметрами $M_\theta \theta^* = \theta$ и $M_\theta\left[\theta^* - \theta\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$ Таким образом, оценка θ^* является несмещенной и состоятельной.

Далее, так как $I(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$, то правая часть неравенства Крамера-Рао

$\left(\sigma_\theta^2(\theta^*) = M_\theta(\theta^*)(x_1, x_2, ..., x_n) - \theta\right)^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}$, где $I(\theta)$ называют количеством информации о параметре θ , содержащемся в одном наблюдении,

$$I(\theta) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \ln p(\theta, z_k)}{\partial \theta}\right]^2 \ p(\theta, z_k) - \text{ в дискретном случае,} \\ \int_X \left[\frac{\partial \ln p(\theta, x)}{\partial \theta}\right]^2 \ p(\theta, x)\nu(dx), \ \theta \in \Theta - \text{ в непрерывном случае.} \end{cases}$$

в рассматриваемом случае равна σ^2/n. Это означает, что оценка θ^* эффективная.

Случайная величина $\sqrt{n}\left(\theta^* - \theta\right) / \sigma$ имеет нормальное распределение с параметрами (0,1). Найдя по заданному $\varepsilon > 0$ (например, по таблицам) такое число c_ε, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-c_\varepsilon}^{c_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \varepsilon$ получим

$Q_\theta = \left\{ -c_\varepsilon < \frac{\sqrt{n}\left(\theta^* - \theta\right)}{\sigma} < c_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon$, откуда

$$Q_\theta = \left\{ -\theta_\varepsilon - \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} r < \theta < \theta^* + \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} \sigma \right\} = 1 - \varepsilon$$

Здесь $Q\left(dx_1, dx_2, ..., dx_n\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}$, $\exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - \theta\right)^2 \right\} dx_1, dx_2, ..., dx_n.$

Таким образом, $\left(\theta^* - \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}}\sigma, \theta^* + \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}}\sigma\right)$ – доверительный интервал с коэффициентом доверия $1 - \varepsilon$.

В)Оценка дисперсии при известном среднем.

В этом случае $P(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{ -\frac{\left(x - a\right)^2}{2\theta} \right\}$, $x \in R$, где $\theta \in \left(0, \infty\right)$ – неизвестный параметр, а параметр a – известен. Эффективной несмещенной оценкой для θ будет $\theta^*\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - a\right)^2$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – результаты независимых наблюдений. Дисперсия оценки θ^* равна $M_\theta\left(\theta^* - \theta\right)^2 = 2\theta^2 / n$. Величина $n\theta^* / \theta$ имеет распределение x^2 с n степенями свободы. Для построения доверительного интервала коэффициентом доверия $1 - \varepsilon$ выберем числа a_1 и a_2 (по таблицам) так, чтобы

$Q_\theta \left\{ a_1 < \frac{n\theta^*}{\theta} < a_2 \right\} = 1 - \varepsilon,$ где

$$Q_\theta\left(dx_1, dx_2, ..., dx_n\right) = \left(2\pi\theta\right)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\theta} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - a\right)^2 \right\} dx_1, dx_2, ..., dx_n.$$

Тогда $Q_\theta\left\{\frac{n\theta^*}{a_1}<\theta<\frac{n\theta^*}{a_2}\right\}=1-\varepsilon,$ так что $\left(n\theta^*/a_2, n\theta^*/a_1\right)-$ искомый интервал.

C) Оценка среднего при неизвестной дисперсии

Задача такая же, как в пункте А), только параметр σ неизвестен. По прежнему оценка $\theta^*=\bar{x}$ несмещенная и состоятельная. Для построения доверительного интервала воспользуемся тем фактом, что величина $\frac{(\bar{x}-\theta)}{s}$, где $s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$, имеет распределение Стьюдента $c(n-1)-$ ой степенью свободы. Плотность этого распределения имеет вид:

$$S_{n-1}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{(n-1)}{2}\right)}\left(1+x^2\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Определяя число c_ε из соотношения $2\int_0^{c_\varepsilon}S_{n-1}(x)\,dx=1-\varepsilon$, получаем

$Q_0\left\{-c_\varepsilon<\frac{\bar{x}-\theta}{s}<c_\varepsilon\right\}=1-\varepsilon,$ где

$Q_0(dx_1,...,dx_n)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\theta)^2\right\}dx_1,...,dx_n$

Таким образом, доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия $1-\varepsilon$ является интервал $\left(\bar{x}-sc_\varepsilon,\bar{x}+sc_\varepsilon\right)$

3.3.2 Оценки параметров биномиального, пуассоновскогораспределений.

Биномиальное распределение

Пусть величина ξ принимает значение $0,1,...,N$ вероятностями $P_k(\theta)=C_N^K\theta^k(1-\theta)^{N-k}$ $\left(k=\overline{0,N}\right)$ соответственно, причем параметр θ $0<\theta<1$ неизвестен. Пусть $k_1,k_2,...,k_n$- результаты n независимых наблюдений случайной величины ξ . Положим $\theta*(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{nN}\sum_{k=1}^{n}k_i$.

Тогда $\theta*$ несмещенная оценка параметра θ , для которой

$M_0(\theta*-\theta)^2=\frac{\theta(1-\theta)}{nN}$.

С другой стороны, нетрудно рассчитать подсчитать, что $I(\theta)=\frac{N}{\theta(1-\theta)}$, откуда следует что $\theta*$ - эффективная оценка параметра θ .

Для построения доверительного интервала воспользуемся тем фактом, что величина $\frac{\sqrt{n\theta}(\theta*-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$ асимптотически нормальна с параметрами (0,1).

Допуская

$$Q_\theta\left\{-a_\varepsilon<\frac{\sqrt{nN}\,(\theta*-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}<a_\varepsilon\right\}\approx\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a_\varepsilon}e^{-\frac{t^2}{2}}at$$

И найдя a_ε из условия $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a_\varepsilon}e^{-\frac{t^2}{2}}at=1-\varepsilon$ получим

$$Q_\theta\left\{-a_\varepsilon<\frac{\sqrt{Nn}(\theta*-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}<a_\varepsilon\right\}\approx1-\varepsilon$$

где Q_θ определяется равенством $Q_\theta(k_1,k_2,...,k_n)=P_{k_1}(\theta)...P_{k_n}(\theta),\ k_i=\overline{0,N}$.

Значит границам доверительного интервала с коэффициентом доверия $1-\varepsilon$ являются корни квадратного уравнения

$$\left(Nn+a_\varepsilon^2\right)x^2-\left(2Nn\theta*+a_\varepsilon^2\right)x+Nn\left(\theta^*\right)^2=0$$

В частности, если $N=1$, то получится, что результат i -го наблюдения случайной величины ξ есть появление или непоявление событий $A=\{\xi=1\}$. Вероятность этого события равно θ . Оценкой для нее служит $\theta^* = \dfrac{\nu}{n}$, где ν -число тех наблюдений, которых событий A произошло.

Пуассоновское распределение

Пусть ξ имеет пуассоновское распределение. Это означает, что ξ может принимать значения 0,1… с вероятностями $P_k(\theta) = \dfrac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$ $(0 < \theta < \infty)$, причем $\theta -$ неизвестный параметр.

Несмещенной оценкой параметра θ является оценка $\theta^* = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k$, где $k_1, k_2, ..., k_n$- результаты независимых наблюдений случайной величины ξ. При этом $M_\theta\left(\theta^* - \theta\right)^2 = \theta / n$. Так как $I(\theta) = \theta^{-1}$, то $\theta -$ эффективная оценка.

Далее, величина $\sqrt{\dfrac{n}{\theta}}\left(\theta^* - \theta\right)$ асимптотически нормальна с параметрами (0,1).

Поэтому при больших n имеет место приближенное равенство $Q_\theta\left\{-a_\varepsilon < \sqrt{\dfrac{n}{\theta}}\left(\theta^* - \theta\right) < a_\varepsilon\right\} \approx 1 - \varepsilon$, где a_ε соответствующим образом выбирается, а мера Q_θ определяется формулой $Q_\theta\left(k_1, k_2, ..., k_n\right) = \dfrac{\theta^{k_1 + ... + k_n}}{k_1!...k_n!}e^{-n\theta}$, $k_1 = 0,1,2,...$

Отсюда находим, что границы доверительного интервала с коэффициентом доверия $1 - \varepsilon$ являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - \left(2\theta^* + \frac{a_\varepsilon^2}{n}\right)x + \left(\theta^*\right)^2 = 0$$

Доверительной интервал построен здесь приближенно, но ошибка с ростом n стремится к нулю.

Оценка среднего значения Г- распределения

Пусть случайная величина ξ имеет Г- распределение
$P_\theta(dx)=\begin{cases}\dfrac{x^{\theta-1}e^{-x}}{\Gamma(\cdot)}dx, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ с неизвестным параметром θ , $0<\theta<\infty$.

Нетрудно подсчитать, что в этом случае $I(\theta)=\dfrac{d^2\ln\Gamma(\cdot)}{d\theta^2}$. Метод моментов приводит к оценке $\theta_1^*=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, где $x_1,x_2,...,x_n$ независимые наблюдения над случайной величиной ξ . Для нее $M_\theta\theta_1^*=\theta$ и
$M_\theta\left(\theta_1^*-\theta\right)^2=\dfrac{\theta}{n}$.

Метод максимального правдоподобия (ММП)

Основным методом получения оценок параметров генеральной совокупности по данным выборки является метод максимального правдоподобия, предложенный Фишером.

Основу метода составляет функция правдоподобия, выражающая плотность вероятности совместного появления результатов выборки $x_1,x_2,...,x_n$:

$$L\left(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n;\theta\right)=\varphi\left(x_1,\theta\right),\varphi\left(x_2,\theta\right),...,\varphi\left(x_i,\theta\right),...,\varphi\left(x_n,\theta\right)$$

или $L\left(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n;\theta\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi\left(x_i,\theta\right)$.

Согласно метода максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение $\tilde{\theta}_n$, которое максимизирует функцию L . Естественность подобного подхода к определению статистических оценок вытекает из смысла функции правдоподобия, которая при каждом фиксированном значении параметра θ является мерой правдоподобности получения наблюдений $x_1,x_2,...,x_n$. Оценка $\tilde{\theta}_n$ такова, что имеющиеся у нас наблюдения $x_1,x_2,...,x_n$ являются наиболее правдоподобными.

Нахождение оценки $\tilde{\theta}_n$ упрощается, если максимизировать не саму функцию L, а $\ln L$, поскольку максимум обеих функций достигается при одном и том же значении θ. Поэтому для отыскания оценки параметра θ (одного или нескольких) надо решить уравнение (систему уравнений) правдоподобия, получаемое приравниванием производной (частных производных) нулю по параметру(параметрам) θ:

$$\frac{d\ln L}{d}=\theta \quad \text{или} \quad \frac{1}{L}\frac{dL}{d\theta}=\theta, \tag{3.8}$$

а затем отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln L$ в максимум.

Предположим, что семейство распределений $P=\{p_\theta, \theta\in\Theta\}$ на измеримом пространстве $(X,\Im)$ имеет плотность распределения $p(\theta,x)$ относительно некоторой $\sigma-$ конечной меры $v(dx)$, заданной на $\Im$. Если X дискретно, $p(\theta,x)$ есть вероятность того, что $\xi=x$ при условии, что истинное значение параметра равно θ.

Пусть $x_1,x_2,...,x_n$– результаты n независимых наблюдений над случайной величиной ξ. Согласно метода максимального правдоподобия (ММП), в качестве оценки $\theta^*(x_1,x_2,...,x_n)$ параметра θ выбирается такая функция от наблюдений, которая доставляет максимум функции $L(\theta,x_1,x_2,...,x_n)$: $p(\theta,x_1)\,p(\theta,x_2)...p(\theta,x_n)=L(\theta,x_1,x_2,...,x_n)$, которая называется функцией правдоподобия. Если при $\theta=\theta^*(x_1,x_2,...,x_n)$ функция правдоподобия достигает наибольшего значения, то при этом же θ достигает наибольшего значения и функция $\ln L(\theta,x_1,x_2,...,x_n)$. Использование функции $\ln L$ часто бывает более удобным. Оценки, получаемые с помощью ММП, называется оценками максимального правдоподобия.

Для нахождения оценок максимального правдоподобия нужно решить уравнения $k=\overline{1,d}$:

$$\frac{\partial \ln l(\theta,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial\theta^k}=0, \quad \text{или} \quad \theta=\left(\theta^1,\theta^2,...,\theta^d\right).$$

Уравнения такого типа называется уравнениями правдоподобия. При решении уравнений правдоподобия следует отбросить решения вида $\theta = const$ и рассматривать только те решения, которые зависят от $x_1, x_2, ..., x_n$ и попадают в область допустимых значений параметра Θ. Следует отметить также, что наибольшее значение функция правдоподобия может принимать на границе области Θ.

Оценки максимального правдоподобия обладают следующими двумя важными свойствами:

а) если существует достаточная оценка $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ для параметра θ, то каждое решение уравнения правдоподобия является функцией от $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$;

б) если для параметра θ существует эффективная оценка (в многомерном случае - совместно-эффективная) $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 3.4 Найти оценку метода максимального правдоподобия для вероятности p наступления некоторого события A по данному числу m появления этого события в n независимых испытаниях.

Решение. Составим функцию правдоподобия:

$$L = (x_1, x_2, ..., x_n; p) = \underbrace{p \cdot p \cdot ... \cdot p}_{m \text{ раз}} \underbrace{(1-p)...(1-p)}_{(n-m) \text{ раз}} \text{ или } L = p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

Тогда $\ln L = m \ln p + (n-m)\ln(1-p)$ и согласно (3.8)

$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p}$, откуда $\tilde{p} = \frac{m}{n}$ (можно показать, что при $\tilde{p} = \frac{m}{n}$ выполняется достаточное условие экстремума функции L).

Таким образом, оценкой метода максимального правдоподобия вероятности p события A будет частность $W = \frac{m}{n}$ этого события.

Пример 3.5 Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Найти оценку максимального правдоподобия для $\hat{\theta} = \left(\mu, \sigma^2\right)$.

Решение. В данном случае

$$L_n(x\,|\,\theta)=\prod_1^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^k-\mu\right)^2\right\}=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n\left(x^k-\mu\right)^2\right\}$$

Предположим, что параметры μ и σ^2 неизвестны. Найдем о.м.п. $\hat{\theta}=\left(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2\right)$. Имеем $\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu\right)^2$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu\right)=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum\left(x_k-\mu\right)^2=0,$$

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_k,\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_1^n\left(x_k-\bar{x}\right)^2.$$

Не всегда оценка максимального правдоподобия является решением уравнения правдоподобия.

Пример 3.6 Найти оценку максимального правдоподобия параметра равномерной модели.

Решение. Если $X=\left(x_1,x_2,...x_n\right)-$ выборка из равномерного распределения $R(0,\theta)$, то из $L(x,\theta)$ имеем, что $L(x,\theta)$ монотонно убывает по θ для $\theta\geq x_{(n)}$.При $\theta=x_{(n)}$ функция правдоподобия достигает своего максимума. Таким образом, оценка максимального правдоподобия $\tilde{\theta}=x_{(n)}$ т.е. совпадает с достаточной статистикой. В этой точке функция правдоподобия разрывна, поэтому производная $L(x;\theta)$ в этой точке не существует. Таким образом, в данном случае оценка максимального правдоподобия не является решением уравнения правдоподобия. Это характерно для случая, когда выборочное пространство зависит от неизвестного параметра.

Пример 3.7 Найти оценку максимального правдоподобия для $\Gamma-$ распределения с плотностью $\gamma_a(x)=\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\cdot x^{\lambda-1}\cdot e^{-\alpha x}, x\geq 0, a>0$ в случае, когда параметр λ известен.

Решение.Имеем: $L(X,\alpha)=\lambda n\ln\alpha-n\ln\Gamma(\lambda)+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i$,

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{\lambda n}{\alpha}-\bar{x}n,\quad \hat{\alpha}^*=\frac{\lambda}{\bar{x}}.$$

Пример 3.8В биномиальном распределении B_p для $X\in B_p$ имеем $P\{x_i=1\}=p,\ P\{x_i=0\}=1-p$ $f_p(X)=p^{\nu}\cdot(1-p)^{n-\nu}$, где ν -число появлений 1 среди элементов $x_1,x_2,...x_n$. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра p.

Решение. Составим функцию правдоподобия:
$L(X,p)=\nu\ln p+(n-\nu)\ln(1-p)$, тогда $\frac{\partial L}{\partial p}=\frac{\nu}{p}-\frac{n-\nu}{1-p},\ \hat{p}^*=\frac{\nu}{n}.$

Оценка максимального правдоподобия не всегда единственная. Это видно из следующего примера.

Пример 3.9 Для $X\in R_{[\theta,\theta+1]}$ (равномерное распределение на $[\theta,\theta+1]$. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .

Решение.Здесь $f_\theta(x)=\begin{cases}1, & x\in[\theta,1+\theta]\\ 0, & x\notin[\theta,1+\theta]\end{cases}$, $\quad f_\theta(X)=\begin{cases}1, & \theta\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le 1+\theta\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$

где $x_{(1)}\le\ldots\le x_{(n)}$ – вариационный ряд. Оценка максимального правдоподобия в этом примере не единственна. Действительно, $f_\theta(X)=1$ (т.е. максимальному значению) при любых θ , удовлетворяющих соотношениям $x_{(n)}-1\le\theta\le x_1$. Так как $x_{(n)}-x_{(1)}\le 1$, то такие θ всегда существуют. Мы можем взять, в частности $\hat{\theta}^*=x_{(1)}$ или $\hat{\theta}^*=x_{(n)}-1$.

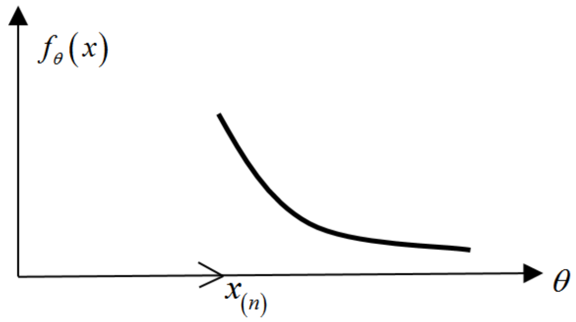
Пример 3.10Для $X\in R_{[0,\theta]}$. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .

Решение.Здесь $f_\theta(x)=\begin{cases}\theta^{-1}, & x\in[0,\theta]\\ 0, & x\notin[0,\theta]\end{cases}$,

$$f_\theta(X)=\begin{cases}\theta^{-n}, & \text{если } x_i\in[0,\theta] \text{ при всех } i=1,2,...,n\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Чтобы получить вид функции $f_\theta(X)$ как функции от θ , перепишем условие $x_i \in [0,\theta]$, $i=\overline{1,n}$, в эквивалентной форме $\theta \ge \max\limits_i x_i = x_{(n)}$. Таким образом, $f_\theta(X)=0$ при $\theta \in \left[0, x_{(n)}\right)$ и $f_\theta(X)=\theta^{-n}$ при $\theta \in \left(x_{(n)}, \infty\right)$ (см. на рис. 1).

Функция $f_\theta(x)$ разрывна, максимум f_θ достигается в точке $\hat{\theta}^* = x_{(n)}$.



Пример 3.11Пусть случайная величина имеет равномерное распределение на интервале $(0,\theta)$, причем значение параметра θ неизвестно. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .

Решение.

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & x \notin [0,\theta], \end{cases}$$

$$L_n(x|\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & x_i \in [0,\theta], i=\overline{1,n} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно,что о.м.п. для θ является такое значение θ, при котором $x_i \le \theta$ и при котором функция $1/\theta^n$ принимает максимальное значение. Так как$1/\theta^n$ - убывающая функция, то такой оценкой будет $\hat{\theta} = \max(x_1, ..., x_n)$.

Как видно из следующего примера,оценка максимального правдоподобия не всегда существует.

Пример 3.12(когда не существует о.м.п.) Для случайной величины, имеющей плотность распределения

$$p(x|\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},\ 0\le x\le\theta,\\ 0,\ x\notin(0,\theta).\end{cases}$$

найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .

Решение. В этом примере значение $\hat{\theta}=\max(x_1,...,x_n)$ не подходит, так как θ должно быть строго больше каждого из x_i, $i=\overline{1,n}$. Поскольку θ может выбрано как угодно близко к $\max(x_1,...,x_n)$, но не может совпадать с ним, то из этого следует, что о.м.п. не существует.

Существуют случаи, когда оценка максимального правдоподобия- не единственная оценка.

Пример 3.13 (неединственность о.м.п) Пусть случайная величина $X_1,...,X_n$ имеют равномерное распределение на интервале $(\theta,\theta+1)$, причем значение θ неизвестно $(-\infty<\theta<\infty)$. Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ .

Решение. Имеем:

$$L_n(x|\theta)=\begin{cases}1,\text{для } \theta\le x_i\le\theta+1,\ i=\overline{1,n},\\ 0,\text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом, любое значение θ из интервала $\left[\max(x_1,...,x_n)-1,\min(x_1,...,x_n)\right]$, является оценка максимального правдоподобия.

Асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия

Пусть $\Theta-$ интервал в $R,\ X=R$ и $\nu(dx)=dx$, где $dx-$ мера Лебега на R .

Приведем теорему, показывающую, что оценки максимального правдоподобия имеют целый ряд хороших свойств при $n\to\infty$.

Теорема: Пусть плотность $p(\theta,x)$ удовлетворяет условиям:

1) При каждом $\theta \in \Theta$ для почти всех x существуют производные $\frac{\partial^k \log p(\theta, x)}{\partial \theta^k}$, $k = 1, 2, 3;$

2) При каждом $\theta \in \Theta$ выполнены неравенства: $\left|\frac{\partial \cdot p(\theta, x)}{\partial \cdot \theta}\right| \le G_1(x)$, $\left|\frac{\partial^2 \cdot p(\theta, x)}{\partial \cdot \theta^2}\right| \le G_2(x)$, $\left|\frac{\partial^3 \cdot p(\theta, x)}{\partial \cdot \theta^3}\right| \le G_3(x)$, где функции $G_1(x)$ и $G_2(x)$ интегрируемы на R по мере Лебега, а $\sup\limits_{\theta \in \Theta} \int\limits_R G_3(x)\, p(\theta, x)\, dx < \infty$;

3) При каждом $\theta \in \Theta$ интеграл $I(\theta) = \int\limits_R \left[\frac{\partial \cdot \log p(\theta, x)}{\partial \cdot \theta}\right]^2 p(\theta, x)\, dx$ конечен и положителен. Тогда уравнение правдоподобия имеет решение $\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, представляющее собой состоятельную, асимптотически эффективную и асимптотически нормальную оценку параметра θ.

Последнее означает, что величина $I(\theta) \cdot \sqrt{n} \cdot (\theta^*(x_1, \ldots, x_n) - \theta)$ асимптотически нормальнас параметрами (0,1), если истинное значение параметра равно нулю. Эта теорема обобщается на случай дискретной случайной величины, а также на случай многомерного параметра θ.

Основной недостаток метода максимального правдоподобия - это трудность вычисления оценок, связанных с решением уравнений правдоподобия, чаще всего нелинейных. Существенно также и то, что для построения оценок максимального правдоподобия и обеспечения их “хороших” свойств необходимо точное знание типа анализируемого закона распределения $\varphi(x, \theta)$, что во многих случаях оказывается практически нереальным.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра Р биноминального распределения, еслив n_1 независимых испытаниях событие Aпоявилось m_1раз в n_2независимых испытаниях событие Aпоявилось m_2раз.

2.Используя метод наибольшего правдоподобия, оценить параметры a иσ^2 нормального распределения, если в результате nнезависимых испытаний случайная величина ξ приняла значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

3.Случайная величина X (число появления события A в m независимых испытаниях) подчинена закону распределения Пуассона с неизвестным параметром λ . Найти методом максимального правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$точечную оценку неизвестного параметра λраспределения Пуассона.

4.Случайная величина – время безотказной работы изделия имеет показательнее распределения. В таблице приведены данные по временем работы в часах для 1000 изделий. Найти ММП точечную оценку неизвестного параметра λ.

5.Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$последовательность независимых случайных величин (наблюдений) с общим распределением. Если существует плотность $\rho_\theta, \theta \in H$, $f(x,\theta) = \frac{dp_\theta(x)}{dm}$относительно некоторой меры m, то

$$f(\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\theta) \text{ и тогда} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log f(x_j, \theta) = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

6. Пусть $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке [θ, θ+1]. Найти несмещенную оценку максимального правдоподобия для θ.

7. Пусть $X_1, \dots, X_n$независимы и имеют гамма-распределение Г(θ, 2). Исследовать на несмещенность и состоятельность оценку $T(X) = X$ для функции$\tau(\theta) = 2/\theta$.

8. Пусть $X_1, \dots, X_n$независимы и имеют гамма-распределение Г(θ, λ), λ - известно. Найти оценку максимального правдоподобия для θ.

9.Пусть $X_1, \dots, X_n$независимы и распределены с плотностью

$$f(x,\ \theta)\ =\begin{cases}\exp\{-(x-\theta)\},\ x>\theta\\ 0, \qquad\qquad\qquad x\le\theta\end{cases}$$

Найти оценку максимального правдоподобия для θ.

10.Пусть случайные величины $X_1,...,X_n$ независимы и распределены с плотностью $\exp-(x-\theta)-\exp[-(x-\theta)]$. Найти оценку максимального правдоподобиядля θ.

11.Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами a и $\sigma 2$. Используя метод моментов, построить оценку

а) неизвестного среднего значения a;

б) неизвестной дисперсии $\sigma 2$, если среднее значение a известно;

в) двумерного параметра $(a,\ \sigma 2)$.

12. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке

а) $[0,\theta],\theta>0;$ в) $[0,2\theta],\theta>0;$

б) $[\theta-1,\theta+1],\theta\in R;$ г) $[-\theta,\theta],\theta>0.$

13.Используя метод моментов, оценить значение α по выборке из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{a}$.

14. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметрами m и p . Используя метод моментов, построить оценку

а) параметра p , если значение m известно;

б) параметра m , если значение p известно;

в) векторного параметра(m,p).

15. Используя метод моментов, оценить параметр $p\in(0,1)$ геометрического распределения.

16. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ равномерного распределения на отрезке

а) $[-\theta,\ 0]$, $\theta>0$; в) $[\theta,\ \theta+2]$, $\theta\in\mathbf{R}$;

б) $[-\theta,\ \theta]$, $\theta>0$; г) $[\theta,\ 2\theta]$, $\theta>0$.

17. Построить оценку максимального правдоподобия параметра α >0 для Г-распределения, если значение β известно.

18. Пусть дана выборка из распределения Вейбулла с параметрами α и θ. Построить оценку максимального правдоподобияпараметра θ >0, если значение α >1 известно.

19. Пусть дана выборка из распределения Коши с параметром сдвига θ. Построить оценку максимального правдоподобияпараметра θ по выборке
а) объёма 1; б) объёма 2.

20. Найти оценку максимального правдоподобия параметра λ >0 распределения Пуассона.

21. Найти оценку максимального правдоподобия параметра p ∈(0,1) геометрического распределения.

§3.4 ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

1. Точечные оценки и понятие доверительного интервала

До сих пор мы ставили своей задачей оценить неизвестный параметр θ одним числом θ_n. Такая оценка называется **точечной.** При большом числе опытов точечная оценка, как правило, близка к неизвестному параметру. Однако, если число наблюдений мало, то случайный характер величины θ_n может привести к значительному расхождению между θ_n и θ. Тогда возникает задача о приближении параметра не одним числом, а целым **интервалом** $\left(\theta_{n_1}, \theta_{n_2}\right)$ так, чтобы вероятность поглощения этим интервалом параметра θ, т.е. вероятность двойного неравенства

$$\theta_{n_1}(X_1, X_2, ..., X_n) < \theta < \theta_{n_2}(X_1, X_2, ..., X_n) \qquad (3.9)$$

была не меньше заданного числа α.

Подчеркнем, что θ_{n_1} и θ_{n_2} суть случайные величины, в то время как θ –некоторое вполне определенное (хотя и неизвестное нам) число: поэтому событие (3.9) является случайным событием, что дает право говорить о вероятности его наступления.

Если число α выбрать достаточно большим, например 0,95 или 0,99, то событие (3.9) можно считать практически достоверным, следовательно, получив опытные значенияслучайной величины X и построив по ним интервал $(\theta_{n_1}, \theta_{n_2})$, можно быть практически уверенным в том, что неизвестный параметр θ окажется заключенным в этом интервале.

Вероятность α называется **доверительной вероятностью,** а соответствующий интервал $(\theta_{n_1}, \theta_{n_2})$ – **доверительным интервалом** (отвечающим доверительней вероятности α).

2. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Перейдемк построению доверительного интервала. При этом ограничимся тем случаем, когда величина X имеет нормальное распределение с параметрами a (математическое ожидание) и σ (среднее квадратическое отклонение). Для параметра a требуется на основе опытных данных построить доверительный интервал, отвечающий доверительной вероятности α.

Эта задача имеет большое практическое значение, особенно при обработке результатов измерений. В самом деле, допустим, что производится серия независимых измерений для определения некоторой физической величины a. По соображениям, изложенным ранее обычно считают, что случайная ошибка измерения распределена по нормальному закону. Следовательно и результат измерения $X + a =$ ошибкаимеет нормальное распределение. Если при этом отсутствует систематическая ошибка, то $M(X) = a$. Поэтому основная задача обработки результатов измерений – это оценка**истинного значения измеряемой величины** математически формулируетсякак задача оценки математического ожидания(или центра нормального распределения).

Частичное решение этой задачи дает эмпирическое среднее $a_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Однако если число n измерений не велико, то больший интерес представляет доверительная оценка, т.е. такой интервал (a_{n_1}, a_{n_2}), который с заданной доверительной вероятностью (или как говорят, с заданной надежностью) покрывает число a.

Задачу построения доверительного интервала для a решим в двух случаях:

1) когда σ известно;
2) когда σ неизвестно.

2.1 Доверительный интервал для а при известном σ.

Пусть σ известно. Примем во внимание, что случайная величина $\sum_{i=1}^{n} X_i$, от которой a_n отличается лишь постоянным множителем $\frac{1}{n}$, подчиняется нормальному закону (этот факт вытекает из доказанного: сумма независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону, сама имеет нормальное распределение). Следовательно, величина a_nтоже распределена нормально с математическим ожиданием aи средним квадратическим отклонением σ. Рассмотрим нормированную случайную величину

$$u_n = \frac{a_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \tag{3.10}$$

ее распределение тоже является нормальным с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Пользуясь этим можно по данному α найти такое числоt_a, чтобы выполнялось $P(-t_a \le u_n \le t_a) = \alpha$. Действительно, вероятность события $\{-t_a \le u_n \le t_a\}$, согласно формуле $P\{x \le u_n \le y\} = \Phi(y) - \Phi(x)$, равна $\Phi(t_a) - \Phi(-t_a)$, т.е. $2\Phi(t_a)$ (где $\Phi(x)$ –функция Лапласа), значит, для нахождения искомого числа t_aдостаточно решить уравнение $2\Phi(t_a) = \alpha$.Получив t_a, мы можем утверждать, что вероятность события $\{-t_a \le u_n \le t_a\}$или

$$\left\{ -t_a \le \frac{a_n - a}{\sigma / \sqrt{n}} \le t_a \right\} \tag{3.11}$$

равна α.

Поскольку (3.11) эквивалентно $a_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le a_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

(3.12)

то можно утверждать, что вероятность события (3.12) равна α. Это означает, что интервал

$$\left(a_n - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; a \le a_n + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \tag{3.13}$$

будет доверительным интервалом для математического ожидания a, отвечающим доверительной вероятности α. Заметим, что длина $2t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ этого интервала оказалась постоянной (не зависящей от опытных данных), хотя, она и зависит от выбранного α, центр интервала находится в случайной точке a_n.

Пример 3.14 Произведено 5 независимых опытов над случайной величиной X, распределенной нормально, с неизвестным ромa и $\sigma = 2$. Результаты опытов приведены в таблице

i	1	2	3	4	5
X_i	-25	34	-20	10	21

Найти оценку a для математического ожидания, а также построить для него 90% -й доверительный интервал (т.е. интервал, отвечающий доверительной вероятности $\alpha = 0{,}90$).

Решение. Исходя из табличных данных, находим

$$a_n = \frac{1}{5}(-25+34-20+10+21) = 2.$$

Далее, решая уравнение $\Phi(t_\alpha) = \alpha,$ получим, $t_\alpha = 1.65,$ откуда

$$t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 1.47.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал будет следующим:

(2-1,47;2+1,47)=(0,53;4,47).

Пример 3.15 Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна 0, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15$м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не менее 5 м при доверительной вероятности 90%

Решение. В данном случае снова имеем $\alpha = 0{,}9$ значит $t_\alpha = 1{,}65$.

Далее по условию $t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5\text{м},$ откуда $\sqrt{n} = 3 \cdot 1.65 = 4.95.$

Следовательно, нужно сделать $n = 25$ измерений.

2.2 Доверительный интервал для a при неизвестном σ.

Обратимся теперь к случаю, когда параметр σ неизвестен (он должен сам оцениваться по данным наблюдения). В этом случае рассмотрение величины $\boldsymbol{u}$ (см. формулу (3.10)) уже ничего не даёт : в выражение для $\boldsymbol{u}$ входит не одно, а сразу два неизвестных: a и σ. Рассмотрим вместо нее величину $a_n^* = \dfrac{\bar{X}_n - a}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}},$

где $s_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$ Оказывается, что ее закон распределения **не зависит от значения параметра $\boldsymbol{\sigma}$.** Можно показать, что случайная величина S_n подчиняется так называемому **закону распределения Стьюдента с (n-1) степенями свободы.** Плотность вероятности для этого закона имеет вид:

$$f_{n-1}(t) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где коэффициентB_n определяется из условия, что интеграл от функции $f_{n-1}(t)$ по всей числовой оси равен 1; выражение для B_n мы не приводим.

Исходя из сказанного можно построить доверительный интервал для a. Для этой цели находим такоеt_α, чтобы было

$P(-t_\alpha < a_n^* < t_\alpha) = \alpha,$ Тогда доверительный интервал для aбудет:

$$\left(\overline{X}_n - t_\alpha \frac{s_n}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + t_\alpha \frac{s_n}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.14}$$

Чтобы найти t_α, мы должны решить уравнение

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f_{n-1}(z)dz = \alpha,$$

или учитывая, что функция $f_{n-1}(t)$четная, имеем $2\int_0^{t_\alpha} f_{n-1}(z)dz = \alpha.$Для интеграла, стоящего в левой части, как функции отt_αсоставлены таблицы; пользуясь ими, можно по данному αнайти $t_\alpha = \tau_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)$–квантили порядка$(1+\alpha)/2$распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Пример 3.16Срок службы осветительной лампы является нормально распределенной случайной величиной, параметры которой a и σ неизвестны. Для их оценки произведены контрольные испытания 16 ламп; исходя из этих испытаний, найдено, что $a_n = 3000$ч, $s_n = 20$ч.

Определить доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью (доверительной вероятностью) 0.9.

Решение. С помощью таблицы распределения Стьюдента находим t_α . В данном случае $n-1=15, \alpha=0.9$, $t_\alpha = 1.753.$ Отсюда $t_\alpha \frac{s_n}{\sqrt{n}} = 1.753 \cdot \frac{20}{\sqrt{16}} = 8.765.$

Искомый доверительный интервал будет:

$$(3000 - 8.765; 3000 + 8.765).$$

Замечание. Сравнивая выражения (3.13) и (3.14) для доверительных интервалов при известном и неизвестном a, мы видим, что они сходны между собой; различие в том, что в (3.14) коэффициент t_αопределяется, исходя не из нормального закона распределения, а из закона распределения Стьюдента (и, кроме того, в (3.13) фигурирует σ, а в (3.14) s_n). Нетрудно видеть, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение с параметрами $a=0, \sigma=1$.

Это непосредственно вытекает из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}=e^{-\frac{t^2}{2}}$. Поэтому при достаточно большом n (практически при $n>20$) можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

2.3 Доверительный интервал для σ при известном a.

Приведем следующую теорему без доказательства.

Теорема. Статистика $\frac{ns_{n_0}^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{\sigma^2}\right)^2$ имеет«хи-квадрат» распределение с n степенями свободы, где $s_{n_0}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$. Обозначим через $\kappa_\gamma(n)$ квантиль порядка $(1-\gamma)$ распределения χ^2 со степенями свободыn.Тогда если $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, то неравенства $k_{1-\alpha_1}(n)\le\frac{ns_{n_0}^2}{\sigma^2}\le k_{\alpha_2}(n)$ выполняются с вероятностью $1-\alpha$. Это дает доверительный интервал для,

$$\sqrt{\frac{ns_{n_0}^2}{k_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)}}<\sigma<\sqrt{\frac{ns_{n_0}^2}{k_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)}} \qquad (3.15)$$

Можно доказать, что этот интервал будет иметь наименьшую длину среди всех доверительных интервалов с доверительной вероятностью α.

2.4 Доверительный интервал для σ при неизвестном a.

В этом случае за основную статистику s_{n_0} возьмем исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение s_n.Известно, что $\frac{ns_n^2}{\sigma^2}$ имеет распределения χ^2 с $(n-1)$-й степенью свободы. Это приводит к доверительному интервалу, аналогичному (3.16):

$$\sqrt{\frac{ns_n^2}{k_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{ns_n^2}{k_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1)}} \tag{3.16}$$

с доверительной вероятностью α.

Пример 3.17 Оценки величины сопротивления для большой партии однотипных резисторов, определенные по результатом измерений 100 случайно отобранных экземпляров, равны $\bar{X}_n = 10$ кОм, $\sigma_n^2 = 1.1 кОм^2$.

а) считая, что $a = 9{,}9$ кОм найти 90% доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ;

б) найти 90% доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ, если a неизвестно.

Решение. а) Находится доверительный интервал для σ при известном $a = 9{,}9$ кОм Имеем

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 - \left(X_n - a\right)^2,\ s_{n_0}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2.$$

Отсюда $s_{n_0}^2 = \sigma_n^2 + (\bar{X}_n - a)^2 = 1.1\text{кОм}^2 + 0{,}01\text{кОм}^2 = 1{,}11\text{кОм}^2$, следовательно,

$$\sqrt{\frac{ns_{n_0}^2}{k_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)}} = \sqrt{\frac{100\cdot 1.11}{124.3}} = 0.9449 \text{ и } \sqrt{\frac{ns_{n_0}^2}{k_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)}} = \sqrt{\frac{100\cdot 1.11}{77.9}} = 1.1937.$$

и искомый доверительный интервал будет: (0,9449;1,1937).

б) α неизвестно. Имеем $\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 = \frac{n-1}{n}\cdot s_n^2.$

Отсюда $s_n^2 = \frac{100}{99}\cdot 1.1 = 1.1212$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{ns_n^2}{k_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)}} = \sqrt{\frac{100\cdot 1.1212}{124.3}} = 0.9497 \text{ и } \sqrt{\frac{ns_n^2}{k_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1)}} = \sqrt{\frac{100\cdot 1.1212}{77.9}} = 1.1997.$$

Доверительный интервал для σ будет: $(0.9497; 1.1997)$.

3. Доверительные интервалы для вероятности успеха в схеме Бернулли и параметра λ распределения Пуассона.

Если распределение генеральной совокупности не является нормальным, то в отдельных случаях по выборкам большого объема можно построить доверительные интервалы для неизвестных параметров приближенно, используя при этом предельные теоремы теории вероятностейи вытекающих из них асимптотических распределений и оценок.

Пусть в nнезависимых испытаниях успех наступил kраз. Тогда с доверительной вероятностьюα доверительный интервал для вероятности успеха p в одном испытании находится по формуле

$p_n - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}} < p < p_n + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}$, где $u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ – квантиль порядка $\frac{1+\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения.

Пример 3.18 При проверке 100 деталей из большой партии обнаружено 10 бракованных деталей. Найти 95% – ный приближенный доверительный интервал для доли бракованных деталей во всей партии.

Решение. Оценка доли бракованных деталей в партии по выборке равна $p_n = 10/100 = 0.1$. По таблице находим $u_{0.975} = 1.96$.Тогда по формулам

$$p_n - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}} = 0.041 \text{ и } p_n - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}} = 0.159.$$

Следовательно, доля бракованных деталей в партии приближенно имеет вид $0.041 < p < 0.159$.

Пусть теперь $X_1, X_2, ..., X_n$–выборка из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона с неизвестным параметром λ. Тогда при достаточно больших n доверительный интервал для параметра λ приближенно имеет вид

$$\bar{X}_n - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} < \lambda < \bar{X}_n + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}},$$

где$u_{\frac{1+\alpha}{2}}$– квантиль порядка$\frac{1+\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения.

Пример 3.19Ниже приводятся данные о числе деталей, поступающих на конвейер в течении 600двухминутных интервалов:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число интервалов	400	167	29	3	0	0	1

Считая, что число деталей, поступающих на конвейер в течении 600двухминутных интервалов имеет распределение Пуассона с параметрами λ, приближенно найти доверительный интервал для параметра λ с доверительной вероятностью 0.9.

Решение. Имеем

$$\bar{X}_n = \frac{0\cdot 400 + 1\cdot 167 + 2\cdot 29 + 3\cdot 3 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6\cdot 1}{600} = 0.4.$$

Далее по таблице находим $u_{0.95} = 1.65.$ Тогда

$$\bar{X}_n - u_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} = 0.4 - 1.65 \cdot 0.02582 = 0.3574 \text{ и}$$

$$\bar{X}_n + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} = 0.4 + 1.65 \cdot 0.02582 = 0.4426.$$

Отсюда доверительный интервал для параметра λ с доверительной вероятностью 0.9 имеет вид $0.3574 < \lambda < 0.4426.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0.95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2,\ \bar{X}_n = 2.3.$
2. По данным 9 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{X}_n = 42.8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s_n = 8.$ Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0{,}999.$
3. В результате 10 независимых измерений расстояния до объекта (М) получены следующие результаты: 25025; 24970; 24780; 25315; 24097; 24646, 24717, 25354, 24912, 25374. Найти доверительный интервал математического ожидания расстояния до объекта с надежностью $\gamma = 0.9$ при условии нормального распределения ошибки измерений со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100.$
4. При 10 независимых измерениях длины стержня (мм) получены следующие результаты: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25»
   Считая ошибку измерений распределенной нормально, найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$ доверительный интервал для математического ожидания длины стержня.
5. Количественный признак генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n найдено среднее квадратическое отклонение s_n. Найти:

а) Среднее квадратическое отклонение σ_n;

б) Доверительный интервал, покрывающий дисперсию с надежностью $\gamma = 0.99$, если $n = 10$, $s_n = 5.1$.

6. По данным 9 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены средние арифметические результатов измерений $\bar{x}_n = 30.1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s_n = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0.99$.
7. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\bar{x}_n$ и объем выборки n: $\sigma = 4$; $\bar{x}_n = 10{,}2$; $n = 16$.
8. Найти минимальный объем выборки при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней будет равна 0,2, если известно среднее квадратическое ожидание генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

9. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0.975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней будет $\delta = 0{,}3$, если известно что среднее квадратическое отклонение нормально распределенной генеральной совокупности равно $\sigma = 1{,}2$.
10. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0.95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

11. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0.925 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней будет равна 0.2, если $\sigma = 1.5$.
12. Из генеральной совокупности объема $n = 12$ извлечена выборка

x_i	-0.5	-0.4	-0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0.95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Для уточнения характеристик, приведенных в задачах 13-18, были проделаны повторные эксперименты и получены новые выборочные оценки. Используя объединенные выборочные оценки, найти 90%- и 99%-ные доверительные интервалы для среднего.

13. Емкость конденсатора, если $n=9,\ \overline{X}_n=18\text{мкФ},\ \sigma_n^2=9.$

14. Время безотказной работы электронной лампы, если $n=64,\ \overline{X}_n=480\text{ч},\ \sigma_n^2=20.$

15. Диаметр вала, если $n=16,\ \overline{X}_n=29\text{мм},\ s_n^2=4{,}5\ \text{мм}^2.$

16. Содержание углерода в единице продукта, если $n=9,\ \overline{X}_n=18.8\ \text{г},\ s_n^2=20\ \text{г}^2.$

17. По данным задачи 13 найти 90%- и 95%-ный доверительные интервалы для дисперсии.

18. По данным задачи 14 найти 99%- и 90%-ный доверительные интервалы для дисперсии.

19. По данным задачи 15 найти 90%- и 95%-ный доверительные интервалы для дисперсии.

20. По данным задачи 16 найти 90%- и 99%-ный доверительные интервалы для дисперсии.

21. Результаты 10 измерений емкости конденсатора прибором, не имеющим систематической ошибки, дали такие отклонение от номинала (пкф): 5,4; -13,9; -11; 7,2; -15,6; 29,2; 1,4; -0,3; 6,6; -9,9. Найти 90%-ный доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения.

22. С автоматической линии, производящей подшипники, было отобрано 400 штук, причем 10 оказалось бракованным. Найти 90% - ный доверительный интервал для вероятности появления бракованного подшипника. Сколько подшипников надо проверить, чтобы с вероятностью 0.9973 можно было утверждать, что вероятность появления бракованного подшипника не отличается от частоты более, чем на 5%?

23. При осмотре 60 ящиков обнаружено 10 поврежденных. Найти 90%-ныйдоверительный интервал для доли поврежденных ящиков во всей партии.
24. На каждый из 36 АТС города в период с двух до трех часов было зафиксировано в среднем 2 вызова. Считая, что число вызовов для каждой АТС имеет распределение Пуассона с одним и тем же параметром λ, приближенно найти доверительный интервал для λ с доверительной вероятности 0.9.
25. Среднее число сбоев в сутки для 100 компьютеров одного типа равно 2.3. В предположении, что число сбоев имеет распределение Пуассона с параметром λ, приближенно найти 95%-ный доверительный интервал для λ.

§3.5ПОНЯТИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ И СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ. УРОВЕНЬ ЗНАЧИМОСТИ И МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ

1. Статистические гипотезы

Задача разработки рациональных методов *проверки* статистических гипотез - одна из основных задач математической статистики. *Статистической гипотезой*(или просто *гипотезой)* называют любое утверждение о*виде* или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Такие утверждения можно делать на основании теоретических соображений или статистических исследованийнаблюдений. Пусть, например, эксперимент состоит в многократном измерении некоторой физической величины, точное значение *a* которой не известно и в процессе измерений не меняется. На результаты измерений влияют многие случайные факторы (точность настройки измерительногоприбора, погрешность округления при считывании данных и т. д.), поэтому результат i-го изменения X_i можно записать в виде $X_i = a + \varepsilon_i$ где ε_i – случайная погрешность измерения. Обычно считают, что общая ошибка ε_i складывается из большого числа ошибок – каждая из которых невелика. На основании центральной предельной теоремы можно предположить, что случайные величиныX_i имеют нормальное распределение. Такое предположение является статистической гипотезой о виде распределения наблюдаемых случайных величин. Если для исследуемого явления (процесса ситуации и т. д.)

сформулирована та или иная гипотеза которую нужно проверить (обычно ее называют *основной* или нулевой гипотезой и обозначают символом H_0), то задача состоит в том, чтобы сформулировать такое правило, которое позволяло бы по результатам соответствующих наблюдений (поимеющимся статистическим данным) принять или отклонить эту гипотезу. Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0, принимается или отвергается,называется *статистическим критерием* (или просто *критерием)* проверки гипотезы H_0. Разработка таких правил и их обоснование с точки зрения требований оптимальности и составляет предмет теории проверки статистических гипотез.

Любое распределение $F_\theta(x)$ наблюдаемой случайной величины X, которое может оказаться истинным (т. е. допустимо в данной ситуации), но отличающееся от гипотетического (т. е. распределения при основной гипотезе H_0) называют *альтернативным распределением* или *альтернативой*. Совокупность всех альтернативных распределений называют *альтернативной гипотезой* и обозначают символом H_1. Приведем несколько примеров математических формулировок наиболее распространенных в приложениях статистических гипотез.

Пример 1.*(гипотеза о виде распределения)*. Пусть производится nнезависимых наблюдений над некоторой случайной величиной Xс неизвестной функцией распределения $F_\theta(x)$. *Гипотезой*, подлежащей проверке, может быть утверждение типа $H_0: F(x) = F_\theta(x)$, где $F_\theta(x) \in \Im$, и $\Im$ – заданное семейство функций распределения. При этом обычно семейство $\Im$ задается в параметрическом виде $\Im = \{F_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$. Например наблюдается неотрицательная целочисленная случайная величина Xитребуется проверить гипотезу $H_0 : F_\theta(x) \in \Pi(\theta)$, где $\Pi(\theta)$ – семейство всех пуассоновских распределений. Во всех этих случаях H_0– это *гипотеза о виде распределения* наблюдаемой случайной величины. В других случаях гипотеза состоит в том, что фиксируются некоторые частные характеристики функции распределения $F_\theta(x)$. Например, она может иметь вид $H_0 : F_\theta(\xi_i) = p_i,\ i = 1, 2, ..., k,$ где $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ и $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$ (причем $p_1 + p_2 + \cdots p_k = 1$)– заданные числа. Здесь H_0– это гипотеза о том, что распределение $F_\theta(x)$ имеет заданные квантили ξ_i для заданных уровней p_i.

Пример 2.*(гипотеза об однородности)*. Произведено kсерий независимыхнаблюдений, результаты которых таковы: $\overrightarrow{X_{n_1}} = (X_1, X_2, ..., X_{n_1})$,

$\overrightarrow{Y_{n_2}} = \left(Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}\right), ..., \overrightarrow{Z_{n_k}} = \left(Z_1, Z_2, ..., Z_{n_k}\right)$. Имеются лиоснования рассматривать эти данные как результаты наблюдений над одной и той же случайной величиной, или, другими словами, можно ли с достаточной надежностью считать, что закон распределения наблюдении от серии к серии не менялся? Если это так, то говорят, что статистические данные *однородны*. Пусть $F_i(x)$-функция (вообще говоря, неизвестная) распределения наблюдений i-й серии, $i=1,...,k$. Тогда задача состоит в проверке *гипотезы об однородности* $H_0 : F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \cdots \equiv F_k(x)$.

Пример 3.*(гипотеза независимости)*. В эксперименте наблюдается двумерная случайная величина $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ с неизвестной функцией распределения $F_{\xi}(x, y)$ и есть основания предполагать, что компоненты ξ_1 и ξ_2 независимы. В этом случае надо проверить *гипотезу независимости* $H_0 : F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$, где $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$-некоторые одномерные функции распределения. В общем случае можно рассматривать k-мерную случайную величину $\overline{\xi}$, и проверять гипотезу независимости ее компонент.

Пример 4.*(гипотеза случайности)*. Результат эксперимента описывается n-мерной случайной величиной $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ с неизвестной функцией распределения $F_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}\right)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Можно ли рассматривать Xкак случайную выборку из распределения некоторой случайной величины $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (т.е.являются ли компоненты X независимымии одинаково распределенными). В данном случае требуетсяпроверить *гипотезу случайности* $H_0 : F_{\vec{\xi}}\left(\vec{x}\right) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot ... \cdot F_{\xi_n}(x_n)$, где $F_{\xi_i}(x)$ — некотораяодномерная функция распределения.

Эти примеры не охватывают возникающих в приложениях задач проверки статистических гипотез. В частности бывают довольно часто ситуации, когда проверяемая гипотеза состоит в том, что некоторый параметр семейства распределений соответствующей совокупности, например среднее значение, дисперсия и т.п., имеет наперед заданное значение или множество значений. Такие гипотезы называются *параметрическими*. Более подробно они будут рассмотрены ниже.

2. Критерии согласия

Рассмотрим общие методы проверки гипотез описанных выше типов. Во всех этих случаях формулируется только одна гипотеза H_0 и требуется проверить, согласуются ли имеющиеся статистические данные с этой гипотезой или же они ее опровергают. Соответствующие критерии называют *критериями согласия.* Введем понятие простой и сложной гипотезы Если гипотеза H_0 однозначно фиксирует распределение наблюдений, то ее называют *простой,* в противном случае – *сложной. В* предыдущих примерах только гипотеза $H_0 : F(x) = F_\theta(x)$ является простой, а остальные – сложные.

Рассмотрим общий метод построения критериев согласия. Пусть о распределении случайной величины $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, описывающей результат изучаемого эксперимента, сформулирована некоторая гипотеза H_0. Чтобы построить критерий проверки этой гипотезы в большинстве случаев поступают следующим образом. Найдем такую статистику $T_n = T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$, характеризующую отклонение эмпирических данных от соответствующих (гипотеза H_0) гипотетических значений (обычно такие статистики неотрицательны), распределение которой в случае справедливости H_0 можно было бы определить (точно или приближенно). В частности, если H_0 сложная гипотеза, то распределение T_n должно быть одним и тем же для всех простых гипотез, составляющих H_0 .Предположим, что такая статистика и ее распределение при гипотезе H_0 найдены. Пусть $\mathrm{F} = \{t : t = T_n\}$ – множество всех возможных значений статистики T_n. Определим для фиксированного заранее достаточно малого числа $\alpha > 0$ подмножество $\mathrm{F}_\alpha \subset \mathrm{F}$ так, чтобыотклонения эмпирических данных от соответствующих гипотетических значений оказались значимыми и вероятность осуществления события $T_n \in \mathrm{F}_\alpha$ в случае справедливости гипотезы H_0, (в дальнейшем для обозначения этой вероятности используется символическая запись $P_{H_0}\{T_n \in \mathrm{F}_\alpha\}$, удовлетворяла условию

$$P_{H_0}\{T_n \in \mathrm{F}_\alpha\} = \alpha \tag{3.17}$$

Тогда правило проверки гипотезы H_0 можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\vec{x}_n$ наблюдавшаяся реализация случайной величины X и $t = T_n(\vec{x}_n)$*– соответствующее значение статистики T_n. Если окажется, что $t \in \mathrm{F}_\alpha$,то при справедливости гипотезы H_0 произошло маловероятное событие и эта гипотеза должна быть отвергнута как противоречащая статистическим данным. В противном случае (т. е. если $t \notin \mathrm{F}_\alpha$) нет оснований отказываться от принятой гипотезы и следует считать, что наблюдения не противоречат гипотезе (или согласуются с ней).*

Таким образом, проверка нулевой гипотезы при помощи критерия согласия может быть разбита на следующие этапы:

1) сформулировать проверяемую H_0 и альтернативную H_1 гипотезы;

2) выбрать уровень значимости α;

3) выбрать статистику Z_n критерия для проверки гипотезы H_0;

4) определить выборочное распределение статистики Z_n при условии, что верна гипотеза H_0;

5) в зависимости от формулировки альтернативной гипотезы определить критическую область $\Gamma_{кр}$ одним из неравенств $\{Z_n > z_{кр}\}$, $\{Z_n < z_{кр}\}$ или $\{z'_{кр} < Z_n < z_{кр}\}$;

6) получить выборку наблюдений и вычислить выборочное значение $z_{набл}$ статистики критерия;

7) принять статистическое решение:
если $Z_{набл} \in \Gamma_{крит}$, то отклонить гипотезу H_0 как не согласующуюся с результатами наблюдений;
если $Z_{набл} \in \Gamma_{крит}$, то принять гипотезу H_0, т.е. считать, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений.

Пример 3.20 По паспортным данным автомобильного двигателя расход топлива на 100 км пробега составляет 10 л. В результате изменения конструкции двигателя ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проводятся испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем, причем выборочное среднее расходов топлива на 100 км пробега по результатам испытаний составило $\bar{x}_n = 9.3$ л. Предположить, что выборка расходов топлива получена из нормально распределенной генеральной совокупности со средним a и дисперсией $\sigma^2 = 4л$. Используя критерий значимости, проверить гипотезу, утверждающую, что изменение конструкции двигателя не повлияло на расход топлива.

Решение. Проверяется гипотеза о среднем a нормально распределенной генеральной совокупности. Проверку гипотезы проведем по этапам:

1) проверяемая гипотеза $H_0 : a = 10$, альтернативная гипотеза $H_1 : a < 10$;

2) выберем уровень значимости $\alpha = 0.05$;

3) в качестве статистики критерия используем оценку математического ожидания – выборочную среднюю $\bar{X}_n$;

4) выборка получена из нормально распределенной генеральной совокупности, выборочное среднее также имеет нормальное распределение с дисперсией $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25}$. При условии, что верна гипотеза H_0, математическое ожидание этого распределения равно 10. Нормированная статистика критерия

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - 10}{\sqrt{4/25}}$$

имеет нормальное распределение со средним 0 и с дисперсией 1;

5) альтернативная гипотеза $H_1 : a < 10$ предполагает уменьшение расхода топлива, следовательно, нужно использовать односторонний критерий. Критическая область определяется равенством $\{Z_n < z_{кр}\}$. По таблице находим $z_{кр} = -z_{0.95} = -1.645$;

6) выборочное значение $Z_{набл} = \frac{\overline{X_n} - 10}{\sqrt{4/25}} = \frac{9.3 - 10}{2/5} = -1.75$;

7) статистическое решение: так как выборочное значение статистики критерия принадлежит критической области, гипотеза H_0 отклоняется: **следует считать, что изменение конструкции двигателя повлияло на уменьшение расхода топлива.**

3. Ошибки первого и второго рода

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута нулевая гипотеза H_0, когда на самом деле она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята нулевая гипотеза H_0, когда на самом деле она ложна.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α: ее называют уровнем значимости. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0.1, 0.05, 0.01 и т.д.

На языке условной вероятности ошибки первого и второго рода можно писать: $P_{H_0}\{T_n \in \mathrm{F}_\alpha\} = \alpha$ и

$$P_{H_1}\{T_n \in \mathrm{F} - \mathrm{F}_\alpha\} = \beta. \qquad (3.18)$$

В описанной выше ситуации критерий имеет следующий вид: если $t = T_n(\vec{x}_n)$ - наблюдавшееся значение статистики T_n, то при $t \in \mathrm{F}_\alpha$ гипотеза H_0, отвергается; в противном случае считается, что данные не противоречат гипотезе. Отметим, что факт $t \in \mathrm{F} - \mathrm{F}_\alpha$ не является доказательством истинности гипотезы H_0; он лишь свидетельствует о том, что согласие опытных данных и теоретических предположений достаточно хорошее («на уровне α»).

В описанной методике статистику T_n называют *статистическим критерием*, а подмножество его значений $\digamma_\alpha$ - *критической областью* для гипотезы H_0(этот термин отражает тот факт, что значение $t \in \digamma_\alpha$ рассматривают как свидетельствующее против этой гипотезы). Число α в соотношении (3.17) называют *уровнем значимости* критерия, и его можно считать вероятностьюотвержения гипотезы H_0,когда она верна. В конкретных задачах величину α выбирают обычно равной 0,1; 0,05; 0,01 и т. д.

Итак, согласно описанной методике, критерий определяется заданием соответствующей критической области в множестве значений статистикиT_n. По своему смыслу критическая область должна включать все отклонения эмпирических данных от соответствующих гипотезе H_0и при условии, что гипотеза H_0 справедлива. Обычно используют области вида $\{t \geq t_{кр}\}$,(длянеотрицательных статистикT_n)или вида $\{|t| \geq t_{кр}\}$,хотя в конкретных задачах возможны и другие варианты выбора критической области. Вид критической области во многом определяется целью, для которой строится критерий. Ограничимся пока следующим общим замечанием: каждый критерий строится для того, чтобы определить, имеют ли место те или иные отклонения от основной гипотезы. Характер таких отклонений может быть разным, поэтому надо иметь критерий как универсального типа («улавливающие» любые отклонения от основной гипотезы), так и предназначенные для выявления отклонений только определенного типа. Часто большие и малые значения статистики T_nуказывают на разный характер отклонения от нулевой гипотезы, поэтому может оказаться, что в одних случаях лучше использовать критерий, основанный на критической области$\{t \geq t_{кр}\}$, а в других - на критической области $\{t < t_{кр}\}$.

Пример 3.20 В условиях примера 1 предположим, что наряду с гипотезой $H_0: a = 10$ л рассматривается альтернативная гипотеза $H_1: a = 9$л. В качестве статистики критерия снова возьмем выборочное среднее $\bar{X}_n$. Предположим, что критическая область задана следующим неравенством $\bar{X}_n < 9.44$ л.Найти вероятности ошибки первого и второго рода для критерия с такой критической областью.

Решение. Найдем вероятность ошибки первого и второго рода. Статистика $\bar{X}_n$ критерия при условии, что верна гипотеза $H_0: a = 10$, имеет нормальное распределение $\mathrm{N}\left(10, \sqrt{4/25}\right)$. По формуле (1), используя таблицу находим:

$$\alpha = P_{H_0}\left(\overline{X_n} < 9.44\right) = \Phi\left(\frac{9.44-10}{\sqrt{4/25}}\right) = \Phi(-1.44) = 1-\Phi(1.44) \approx 0.08.$$

Это означает, что принятый критерий классифицирует примерно 8% автомобилей, имеющих расход 10 л на 100 км пробега, как автомобили, имеющие меньший расход топлива.

При условии, что верна гипотеза H_1: $a = 9$, статистика $\bar{X}_n$ имеет нормальное распределение $\mathrm{N}\left(9, \sqrt{4/25}\right)$. Вероятность ошибки второго рода по формуле (3.18) равна

$$\beta = P_{H_1}\left(\overline{X_n} \geq 9.44\right) = 1-\Phi\left(\frac{9.44-9}{\sqrt{4/25}}\right) = 1-\Phi(1.1) \approx 0.136.$$

Следовательно, в соответствии с принятым критерием 13.6% автомобилей, имеющих расход топлива 9 л на 100 км пробега, классифицируются как автомобили, имеющие расход 10 л.

4. Мощность критериев. Равномерно наиболее мощный критерий

Для проверки одной и той же гипотезы H_0 можно строить различные критерии согласия, основываясь на разных статистиках $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, и чтобы выбрать в конкретной ситуации тот или иной критерий, надо иметь принципы сравнения различных критериев. Идея построения таких принципов состоит в исследовании поведения критериев при тех или иных отклонениях от основной гипотезы. Введем понятия мощности критериев.

Пусть для проверяемой гипотезы H_0, построен некоторый критерий с уровнем значимости α, основанный на статистике T_n, и пусть $\mathrm{F}_{кр}$ — соответствующая критическая область. Величину $W(F) = P_{H_1}\{T_n \in \mathrm{F}_{кр}\}$, представляющую собой вероятность попадания значения статистики критерия в критическую область, когда истинным распределением наблюдений является распределение $F(x)$ при условии, что справедлива альтернативная гипотеза, называют *функцией мощности* критерии. Таким образом, функция мощности – это

$$W(F) = P_{H_1}\{T_n \in \mathrm{F}_{кр}\} = 1-\beta$$

Если значение $W(F)$ *мощности критерия возрастает, то вероятность ошибки второго рода уменьшается*. Отсюда: *критерий,* *имеющий наибольшую мощность, называют равномерно наиболее мощным критерием.*

Критерий называется *состоятельным*, если с ростом объема выборки мощность критерия стремится к 1.

Функция мощности играет в теории проверки гипотез фундаментальную роль. Она полностью характеризует критерий, так как показывает, насколько хорошо критерий соответствует своему основному назначению - «улавливать» возможныеотклонения от основной гипотезы. В терминах $W(F)$можно считать, что критерий тем лучше («тем мощнее»), чем больше его мощность при альтернативах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Станок-автомат изготовляет детали размером 20мм. Продукция станка контролируется по величине X – отклонению размера детали от номинального 20мм. Предположим, что X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием α и дисперсией $\sigma^2 = 0.04мм^2$.Рассмотрим следующие гипотезы:

   а) $H_0 : a = 0,$

   б) $H_1 : a \neq 0,$

   в) $H_2 : -1 \leq a \leq 1,$

   г) $H_3 :$ деталь изготовлен из неоднородного материала.

   Определить, какие из гипотез $H_0 - H_3$ является статистическими, какие статические гипотезы являются простыми, а какие сложными?

2. Пусть X – число клиентовиз числа посещающих за день клиентов банка, которые выполняют банковские операции. Классифицировать следующие гипотезы, если в определенный день банк посещало всего 50 человек, и каждый с вероятностью p выполняет банковские операции.

   а) $H_0 : X$ имеет биномиальное распределение $B(50,1/2);$

   б) $H_1 : X$ имеет биномиальное распределение $B(50, p)$, причем $0.3 \leq p \leq 0.7;$

   в) $H_2 : P(X \leq 3) > 1/2;$

   г) $H_3 : p \neq 1/2.$

3. Наблюдаемый объект может быть либо своим, либо объектом противника. Система обнаружения относит объект к одному из классов по результатам нескольких замеров определенных характеристик. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы, если по

ошибке первого рода происходит «пропуск цели». В чем состоит ошибка второго рода?

4. (Продолжение) В условиях предыдущей задачи 3 пусть система обнаружения ошибается с вероятностью $p=0.1$ в каждом измерения. Критерий «пропуск цели» следующий. Объект считается нашим, если подряд по трем измерениям система считает, что он наш, в противном случае цель не выпускается из наблюдения. Указать допустимую и критическую область. Найти вероятности ошибок первого и второго рода.
5. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из нормального распределения со среднейa и единичной дисперсией. Для проверки основной гипотезы $a=0$ против альтернативы $a=1$ используется следующий критерий: основная гипотеза принимается, если $X_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода, если объем выборки $n=80$.
6. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из нормального распределения со среднейa и единичной дисперсией. Рассматриваются две простые гипотезы: основная $a=-1$ и альтернативная $a=0$. Предлагается следующий статистический критерий для проверки этих гипотез: основная принимается, если $\overline{X_n} < -n^{\gamma}$; в противном случае принимается альтернативная гипотеза. Здесь γ – заранее выбранное вещественное число. Определить все числа γ, при которых критерий является состоятельным.
7. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка, о плотности распределения которой высказаны две гипотезы: гипотеза H_0: о том, что X_i имеет распределение с плотностью

$$f_0(x) = \begin{cases} e^{-(x-6)} & \text{при } x \geq 6, \\ 0 & \text{при } x < 6, \end{cases}$$

и альтернатива H_1, состоящая в том, чтоX_i имеет плотность

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-3)} & \text{при } x \geq 3, \\ 0 & \text{при } x < 3. \end{cases}$$

Найти пределы при$n \to \infty$ вероятностей ошибок первого и второго рода следующего критерия: гипотеза H_0 принимается тогда и только тогда, когда

а) $\overline{X_n} > 3.5 + 1/\sqrt{n}$; б) $\overline{X_n} > 3.5 + 1/\sqrt{n}$; в) $\overline{X_n} > 3.5$.

8. Пусть X – число субъектов, уклоняющихся от налогооуплатысреди 24 проверенных предприятий. Классифицировать следующие гипотезы:

а) $H_0 : X$ имеет биномиальное распределение $B(24, 0.2)$;

б) $H_1 : X$ имеет биномиальное распределение $B(24, p)$, причем $0.1 \le p \le 0.3$;

в) $H_2 : P(X \le 5) \ge 0.5$;

г) $H_3 : X$ имеетравномерное распределение в виде $P(X = k) = 0.04$ при $k = 0,1,2,\dots,24$.

9. Считается, что новая технология обработки кожи для определенной обуви имеет эффективность 95%, если среди 20 испытанных образцов нет ни одного с признаками брака изделий; в противном случае эффективность обработки принимается равным 80%. Пусть p – вероятность брака каждого образца. Предположим, что образцы обрабатываются и испытываются независимо друг от друга. Рассмотрим нулевую гипотезу $H_0 : p = 0.2$ и альтернативную гипотезу $H_1 : p = 0.05$. Ответить на следующие вопросы:

а) какая статистика критерия используется в данной задаче, каковы ее распределение и область изменения,

б) какова критическая область критерия?

г) в чем состоят ошибки первого и второго рода и чему равны их вероятности?

10. Проверка электронной аппаратуры осуществляется специальным тестом. Если аппаратура функционирует правильно, то вероятность прохождения теста равна 0.99; в противном случае вероятность прохождения теста равна 0.40. Аппаратура допускается к работе , если тест проходит 5 раз подряд. При условии что число прохождений теста подчиняется биномиальному распределению, определить:

а) область изменения и критическая область статистики критерия, распределение статистики критерия?

б) сформулировать нулевую гипотезу, если ошибка первого рода состоит в отклонении правильно функционирующей аппаратуры

в) сформулировать альтернативную гипотезу и ошибки первого и второго род

г) чему равны вероятности ошибок первого и второго рода?

11. Большая партия изделий может содержать некоторую долю дефектных. Поставщик утверждает, что эта доля составляет 5%; по-

купатель предполагает, что доля дефектных изделий равна 10%. Условия поставки: из партии случайным образом отбирается и проверяется 10 изделий; партия принимается на условиях поставщика, если при проверке обнаружено не более одного дефектного изделия; в противном случае партия принимается на условиях покупателя. Сформулировать эту задачу в терминах теории проверки статистических гипотез:

а) статистика критерия, область ее значений, критическая область

б) распределение статистики критерия

в) в чем состоят проверяемая и альтернативная гипотеза?

г) в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности?

12. Из продукции автомата, обрабатывающего болты с номинальными значением контролируемого размера $a=40$ мм, была взята выборка болтов объема $n = 36$. Выборочное среднее контролируемого размера $\overline{X_n}=40.2мм$. Результаты предыдущих измерений дают основание предполагать, что действительные размеры болтов образуют нормально распределенную совокупность с дисперсией $\sigma^2=1мм^2$. Можно ли по результатам проведенного выборочного исследования утверждать, что контролируемый размер в продукции автомата не имеет положительного смещения по отношению к номинальному размеру? Принять $\alpha=0.01$. Какова критическая область в этом случае?
13. (Продолжение) В условиях предыдущей задачи предположим, что партия болтов с номинальным размером $a=40.1мм$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода при альтернативной гипотезе $H_1: a=40.3мм$, если решение принимается по выборке объема $n=36$.
14. (Продолжение) В условиях задачи 11, решить задачу 12, если партия болтов бракуется при выполнения одного из неравенств $\overline{X_n}>40.1мм$ и $\overline{X_n}<39.9мм$, где $\overline{X_n}$ – выборочное среднее контролируемого размера.
15. (Продолжение) В условиях задачи 11какой минимальный объем выборки n следует взять, чтобы при проверке гипотезы $H_0: a=40мм$ против альтернативной $H_1: a=40.3мм$ при вероятности ошибки первого рода $\alpha=0.10$вероятность ошибки второго рода не превосходила 0.10? Какая критическая область соответствует этим условиям при объеме выборки n?

16. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Рассматриваются две простые гипотезы H_0: о том, что $\lambda = 1$и альтернативная H_1: о том, что $\lambda = 3$. Критерий δпредписывает принимать основную гипотезу, если $X_{(n)} \leq 1$, и альтернативу в противном случае. Найти минимальный размер выборки, при котором мощность этого критерия превышает заданное значение $\gamma = 1 - \beta = 0.9$.
17. Основная гипотеза состоит в том, что данный человек лишён телепатических способностей и угадывает мысли на расстоянии в каждом единичном эксперименте с вероятностью $1/2$. Гипотеза же о наличии телепатических способностей у данного человека принимается, если в 100 независимых однотипных экспериментах по угадыванию мыслей на расстоянии не менее 70 заканчивается успехом. Чему равна вероятность признать телепатом человека без телепатических способностей?
18. В урне содержатся неразличимые на ощупь черные и белые шары. Предполагается, что число черных шаров равно числу белых. Эта гипотеза принимается, если при извлечении 50 шаров (с возвращением) число черных шаров будет в пределах от 20 до 30.

    а) какова вероятность ошибки первого рода?

    б) найти вероятность ошибки второго рода, если альтернативная гипотеза утверждает, что вероятность появления черного шара равна $1/3$.
19. В условиях предыдущей задачи 19, критерий принятия гипотезы H_0 следующий: эта гипотеза принимается, если при извлечении 100 шаров (с возвращением) число черных шаров будет в пределах от 40 до 60.

    а)найти вероятность ошибки первого и второго рода, если альтернативная гипотеза утверждает, что вероятность появления черного шара равна $1/3$.

    в) будет лиотличие с ответами предыдущей задачи?

§3.6 КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ КОЛМОГОРОВА И ПИРСОНА

1. Критерии согласия и общие способы их построения

Рассмотрим общий метод построения критериев согласия. Пусть о распределении случайной величины $\overrightarrow{X_n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, описывающей результат изучаемого эксперимента, сформулирована некоторая гипотеза H_0.Чтобы построить критерий проверки этой гипотезы, в большинстве случаев поступают следующим образом. Пытаются найти такую статистику $K_n = K_n\left(\overrightarrow{X_n}\right)$,характеризующую отклонение эмпирических данных от соответствующих (гипотезе H_0) гипотетических значений, распределений которой в случае справедливости H_0 можно было бы определить (точно или приближенно).

Предположим, что такая статистика и ее распределение найдены. Пусть Г -множество всех возможных значений статистики K_n :определим для фиксированного заранее достаточно малого числа $\alpha > 0$ критическую область $\Gamma_{кр}$ так чтобы $P\left(K_n \in \Gamma_{кр}\right) \le \alpha.$ Тогда правило проверки гипотезы H_0 можно с формулировать следующим образом.Если окажется, что $K_n \in \Gamma_{кр}$,то эта гипотеза должна быть отвергнута как противоречащая статистическим данным. В противном случае нет оснований отказываться от принятой гипотезы и следует считать, что наблюдения не противоречат выдвинутой гипотезе (или согласуются с ней).

2. Критерий согласия Колмогорова

Его применяют в тех случаях, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ непрерывна. Статистикой критерия является величина

$$K_n = \underset{-\infty \le x \le +\infty}{Sup} \left|F_n(x) - F(x)\right| \qquad (3.19)$$

представляющая собой максимальной отклонение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ от гипотетической функции распределения $F(x)$. При каждом x величина $F_n(x)$ является оптимальной оценкой для $F(x)$ и с увеличением объема выборки n происходит сближение $F_n(x)$ с $F(x)$. Поэтому по крайней мере при больших n в тех случаях, когда гипотеза H_0 истина, значение K_n не должно существенно отклоняться от нуля. Отсюда следует, что критическую область критерия, следует задавать в виде $\Gamma_{кр} = \{t \ge t_\alpha\}$.

Особенностью статистики K_n является то, что ее распределение при гипотезе H_0 не зависит от вида функции $F(x)$. Действительно, полагая в формуле (3.19) $x = F^{-1}(u), 0 < u < 1$,где $F^{-1}(u)$– функция, обратная к $F(x)$, получаем

$$K_n = \underset{0 \le u \le 1}{Sup} \left|F_n\left(F^{-1}(u) - u\right)\right|,$$

где $F_n\left(F^{-1}(u)\right)$ распределена так же, как $R_n(x)$ - эмпирическая функция распределения выборки из равномерного $R(0,1)$ распределения. Следовательно, распределение K_n не зависит от вида функции распределения $F(x)$, если справедлива H_0. Этот факт имеет принципиальное значение, так как тем самым достаточно вычислить и протабулировать распределения K_n только один раз, а именно для выборки из равномерного $R(0,1)$ распределения, и использовать ее для проверки гипотезы относительно произвольной непрерывной функции распределения $F(x)$.

Вторым замечательным фактом является то, что распределение статистики при достаточно больших n (уже при $n > 20$) практически от n не зависит. Отсюда следует, что при $n > 20$ критическую границу можно полагать равной $\lambda_\alpha / \sqrt{\text{т}}$, где $K(\lambda_\alpha) = 1-\alpha$ ($K(t)$– функция распределения Колмогорова определена в специальных таблицах). Действительно, в этом случае

$$P_{H_0}\left\{K_n \in \Gamma_{кр}\right\} = P_{H_0}\left\{\sqrt{n}K_n \geq \lambda_\alpha\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha \qquad (3.20)$$

Итак, $\lambda_\alpha = 1.3581$ при $\alpha = 0.05$ и $\lambda_\alpha = 1.6276$ при $\alpha = 0.01$.

Пример 3.22 Результаты измерения 1000 деталей представлены в виде группированной выборки в таблице

i	x_i^*	m_i	i	x_i^*	m_i
1	98.0	21	6	100.5	201
2	98.5	47	7	101.0	142
3	99.0	87	8	101.5	97
4	99.5	158	9	102.0	41
5	100.0	181	10	102.5	25

Пользуясь критерием согласия Колмогорова, проверить согласие полученных наблюдений с предположением, что величина X подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием $a = 100.25$мм, средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$мм, при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Решение. Теоретическая функция распределения определяется по формуле

$$F(x) = \Phi_{(0,1)}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi_{(0,1)}(x - 100.25).$$

Эмпирическую функцию распределения находим по формуле

$$F_n\left(x_i^*\right)=\frac{1}{1000}\cdot\left(\frac{m_i}{2}+\sum_{j=1}^{i-1}m_j\right).$$

Тогда имеем

i	x_i^*	$x_i^*-100.25$	$F(x)$	$F_n(x)$	$\lvert F(x)-F_n(x)\rvert$
1	98.0	-2.25	0.0122	0.0105	0.0017
2	98.5	-1.75	0.0401	0.0445	0.0044
3	99.0	-1.25	0.1056	0.1115	0.0059
4	99.5	-0.75	0.2266	0.234	0.0074
5	100.0	-0.25	0.4013	0.4035	0.0022
6	100.5	0.25	0.5987	0.5945	0.0042
7	101.0	0.75	0.7734	0.766	0.0074
8	101.5	1.25	0.8944	0.8855	0.0089
9	102.0	1.75	0.9599	0.9545	0.0054
10	102.5	2.25	0.9878	0.9875	0.0003

Определив

$$\lambda_{выб}=\sqrt{n}K_n=\sqrt{1000}\cdot 0.0089=0.281,$$

находим из таблиц распределения Колмогорова $\lambda_\alpha=1.224$. Видим, что $\lambda_{выб}<\lambda_\alpha$. Следовательно, отклонения незначимы и можно считать, что гипотеза о согласии наблюдаемых данных с законом нормального распределения, имеющим параметры $a=100.25$мм, $\sigma=1$мм, не опровергается.

3. Критерий χ^2 согласия Пирсона

На практике вычисление статистики K_n –трудоемкая задача. Поэтому часто применяют другой критерий, называемый *критерием* χ^2. Его можно использовать для любых распределений, в том числе и многомерных. Чтобы воспользоваться этим критерием, выборочные данные предварительно группируют и переходят к частотному представлению исходных данных.

Пусть n_i – частоты попадания выборочных значений в соответствующий интервал A_i группировки $A_1, A_2, \dots, A_k$ (здесь всю выборку разбиваем на k непересекающихся интервалов), $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$. И пусть далее

$p_i = P_{H_0}(X \in A_i)$. В качестве статистики, характеризующей отклонение выборочных данных от соответствующих гипотетических значений, принимают величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (3.21)$$

а критическую область задают в виде $Г_{кр} = \{t \geq t_\alpha\}$. Точное распределение χ^2 невозможно вычислить при заданном уровне значимости критической границы t_α, но для больших объемов выборок n статистика χ^2 имеет при гипотезе H_0 простое предельное распределение, не зависящее от гипотезы. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то при $n \to \infty$

$$X_n^2 \cdot \chi^2(k - r - 1)$$

где r - число оцениваемых параметров распределения, упомянутого в выдвинутой гипотезе и $\chi^2(m)$ – случайная величина, имеющая распределение хи-квадрата с m степенями свободы.

На практике предельное распределение $\chi^2(k-r-1)$. можно использовать с хорошим приближением уже при $n \geq 50$ и $\chi^2(k-r-1)$. $np_i \geq 5$. При выполнении этих условий в соответствии с теоремой 1 критическую границу t_a выбирают равной $\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)$, т.е. $(1-\alpha)$-порядок квантили распределения.

Таким образом, критерий согласия χ^2 имеет следующий вид: пусть заданы уровень значимости α, объем выборки n и наблюдавшиеся значения $np_1, np_2, \ldots, np_k$ $h = (h_1, h_2 \ldots, h_n)$ вектора частот $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ удовлетворяют условиям $n \geq 50$ и $h_j \geq 5$, $j = \overline{1, N}$. Тогда если наблюдавшееся значение $t_{набл} = X_n^2$ статистики (3.21) удовлетворяет неравенству $t_{набл} \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)$, то гипотезу отвергают; в противном случае гипотеза не противоречит результатам испытаний.

Сделаем несколько общих замечаний. Критерий согласия χ^2 применяется в тех случаях, когда в каждом опыте наблюдается одно из N несовместимых событий $A_1, \ldots, A_N$ и заданы частоты появлений этих событий в n испытаниях (говорят также, что наблюдается дискретная случайная величина, принимающая N различных значений). Если же выборка имеет непрерывный закон распределения, то, применяя предварительно метод группировки данных, приходят к рассмотрению дискретной схемы, в которой в качестве событий A_j рассматриваются события $\{X \in \Delta_j\}$, где Δ_j - интервалы группировки. Недостатком метода является то, что группировка данных по интервалам приводит к некоторой потере информации. Кроме того, остается еще вопрос о выборке числа интервалов N и длине самих интервалов Δ_j. Однако критерий χ^2 имеет и некоторые достоинства: при его применении нет необходимости учитывать точные значения наблюдений (бывают случаи, когда исходные статические данные носят не числовой характер) Несомненным преимуществом этого критерия является его универсальность.

4. Примеры применениякритерия согласия χ^2 Пирсона

Приведем несколько примеров применения критерия χ^2.

Пример 3.23 Проверить гипотезы о распределении Пуассона числа отказов аппаратуры за 10000 часов работы.

Число отказов k	0	1	2	3	4	5	≥ 6	сумма
Количество случаев набл.	427	235	72	21	1	1	0	757

Общее число обследованных экземпляров аппаратуры $n = 757$, при этом наблюдалось $0 \cdot 427 + 1 \cdot 235 + 2 \cdot 72 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 = 451$ отказов. Проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0,1,2,\ldots \text{ при } \alpha = 0.01.$$

Решение. Оценка параметра λ равна среднему числу отказов: $\overline{\lambda_n} = 451/757 \approx 0.6$. Тогда по таблице при $\lambda = 0.6$ находим вероятности p_k с ожидаемое число случаев с k отказами.

Для $k = \overline{4,6}$ значения $np_k \leq 5$, поэтому объединяем эти строки со строкой для $k = 3$. В результате получим значения, приведенные в таблице

Число отка-зов, k	Количество случаев, в кото-рых наблюда-лось k отказов, n_k	$p_k = \frac{0.6^k}{k!}e^{-0.6}$	Ожидае-мое слу-чаев с k миnp_k	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
0	427	0,54881	416	0,291
1	235	0,32929	249	0,787
2	72	0,09879	75	0,120
3	21	0,01976	$\left.\begin{matrix}15\\2\\0\\0\end{matrix}\right\}=17$	2,118
4	1	0,00296		
5	1	0,00036		
≥ 6	0	0,00004		
Сумма	757	-		$X_n^2 = 3.31$

Так как по выборке оценивался один параметр λ,то $r = 1$ и число степеней свободы равно $k - r - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$. Поэтому по таблице χ^2 со степенью свободы 2 находим $\chi^2_{0.99}(2) = 9.21$. Следовательно, гипотеза о распределении числа отказов по законуПуассона принимается.

Пример 3.24Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, из которой взята выборка из 55 наблюдений.

13,5	20,3	15,4	17,2	19,2	23,3	18,1	21,9	15,3	16,8	13,2
17,8	20,4	16,5	19,7	20,5	14,3.	20,1	16,8	14,7	20,8	19,5
11,8	15,3	19,3	17,8	16,2	15,7	22,8	21,9	12,5	10,1	21,1
18,6	18,3	14,7	14,5	18,1	18,4	13,9	19,1	18,5	20,2	23,8
19,1	16,7	20,4	19,5	17,2	19,6	17,8	21,3	17,5	19,4	17,8

Принять $\alpha = 0{,}1$.

Решение. Объем выборки $n = 55$. Для проверки гипотезы о нормальном распределениигенеральной совокупности нужно найти оценки математического ожидания и дисперсии. Имеем

$$a_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 17.84, \qquad s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X_n}\right)^2} \approx 8.53$$

Разбивая на 7 интервалов, проводя группировки, если $np_k \leq 5$ получим следующую таблицу

Номер интервалов	Интервалы (a_{k-1}, a_k)	Наблюд. Частоты n_k	Вероят. Попод. p_k	Ожд. Част. np_k	Перегруп. np_k	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
1	$(-\infty, 12)$	2	0,0228	1,254		
2	(12,14)	4	0,0731	4,020	5,274	0,010
3	(14,16)	8	0,1686	9,273	9,273	0,175
4	(16,18)	12	0,2576	14,168	14,168	0,332
5	(18,20)	16	0,2484	13,662	13,662	0,400
6	(20,22)	10	0,1519	8,354	12,633	0,011
7	$(22, +\infty)$	3	0,0778	4,279		
	Сумма	55	1,0000	55	55	0,928

Так как после объединения осталось $k=5$ интервалов, а по выборке определены оценки двух параметров (т.е. $r=2$), то число степеней свободы равно $5-2-1=2$. По таблице находим $\chi^2_{0.9}(2)=4.61$, следовательно, гипотеза о нормальном распределении выборки принимается.

Задачи для самостоятельного решения

1. Цифры 0, 1, 2, ….,9 среди 800 первых десятичных знаков числа π появились 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о согласии этих данных с законом равномерного распределения при уровне значимости $\alpha=0{,}10$ (вероятность появления любой цифры на месте любого десятичного знака равна 0.1).

2. В следующей таблице приведены отклонения диаметров валиков, обработанных на станке, от заданного размера.

Границы интервала, *мк*	$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$	$20-25$
Численность разряда m_i	15	75	100	50	10
Частота p_i^*	0.06	0.30	0.40	0.20	0.04

Проверить, используя критерий Колмогорова, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв уровень значимости равным $\alpha = 0{,}10$.

3. Решить предыдущую задачу, применяя критерий χ^2 Пирсона с уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

4. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении функции распределения признака X .

Δ_i	[4.1;4.2)	[4.2;4.3)	[4.3;4.4)	[4.4;4.5)	[4.5;4.6)
n_i	1	2	3	4	5

Δ_i	[4.6;4.7)	[4.7;4.8)	[4.8;4.9)	[4.9;5.0)
n_i	8	8	9	10

5. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$.

x_i	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.2	2.3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

6. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими n_i, которые вычисляются, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности χ^2

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n_i'	6	18	36	76	39	18	7

7. Две монеты одновременно подброшены 20 раз. Число выпадений «герба» приведено в таблице

Выпадение «герба» на каждой монете	0	1	2
Число появления события	4	8	8

Можно ли считать, что обе монеты симметричными? Принять $\alpha = 0.05$. По таблице найдено $\chi^2_{0.95}(2) = 5.99$.

8. При 120 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 40 раз. Согласуется ли этот результат с утверждением, что кость правильная? Принять $\alpha = 0.05$. (По таблице найдено $\chi^2_{0.95}(1) = 3.84$).
9. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0.05$, установить, случайно или значимое расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическим частотами $n_i^{'}$, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

(По таблице определено $\chi^2_{0.90}(2) = 6.00$).

10. При 50 подбрасывания монеты «герб» появился 20 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять $\alpha = 0.05$.(По таблице найдено $\chi^2_{0.90}(1) = 2.71$).

11. При 120 бросаниях игральной кости шестерка выпала 40 раз. Согласуется ли этот результат с утверждением, что кость правильная? Принять $\alpha = 0.05$.
12. Ниже приводятся данные о фактических объемах сбыта (в условных единицах) в пяти районах.

Район	1	2	3	4	5
Фактический объем сбыта	110	130	70	90	100

Согласуются ли эти результаты с предложением о том, что сбыт продукции в этих районах должен быть одинаковым? Принять $\alpha = 0.01$.
13. На экзамене студент отвечает только на один вопрос по одной из трех частей курса. Анализ вопросов, заданных 60 студентам, показал, что 23 студента получили вопросы из первой, 15 – из второй и 22 – из третьей части курса.

Можно ли считать, что студент, идущий на экзамен, с равной вероятностью получит вопрос по любой из трех частей курса? Принять $\alpha = 0.10$.

14. Метод получения случайных чисел был применен 250 раз, при этом получены следующие результаты:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота появления	27	18	23	31	21	23	28	25	22	32

Можно ли считать, что примененный метод действительно дает случайные числа? Принять $\alpha = 0.10$.

15. В цехе с 10 станками ежедневно регистрировалось число вышедших из строя станков. Всего было проведено 200 наблюдений, результаты которых приведены ниже:

Число выбывших станков	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число зарегистрированных случаев	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Проверить гипотезу H_0 о том, что число выбывших из строя станков имеет распределение Пуассона. Принять $\alpha = 0.05$.

16. Во время второй мировой войне на Лондон упало 537 самолетов-снарядов. Вся территория Лондона была разделена на 576 участков площадью по 0,25 км². Ниже приведены числа участков n_k, на которые упало k снарядов:

k	0	1	2	3	4	5 и больше
n_k	229	211	93	35	7	1

Согласуются ли эти данные с гипотезой о том, что число снарядов, упавших на каждый из участков, имеет распределение Пуассона? Принять $\alpha = 0.05$.

17. Ниже приводятся данные о числе деталей, поступающих на конвейер в течении 600 двухминутных интервалов:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число интервалов	400	167	29	3	0	0	1

Используя критерий χ^2, проверить гипотезу H_0 о Пуассоновском распределении числа деталей при $\alpha = 0.05$.

18. При испытании радиоэлектронной аппаратуры фиксировалось число отказов. Результаты 59 испытаний приводятся ниже:

Число отказов	0	1	2	3
Число испытаний	42	10	4	3

Проверить гипотезу H_0 о том, что число отказов имеет распределение Пуассона при $\alpha = 0.10$.

§3.7 ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ, СТОХАСТИЧЕСКАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТИ. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

1. Понятие зависимости случайных величин

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин. Рассмотрим сначала зависимость Y от одной случайной (или неслучайной) величины X, а затем от нескольких величин.

Две случайные величины могут быть связаны функциональной зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой стохастической, либо быть независимыми.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены еще действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин (под "общими" здесь подразумеваются такие факторы, которые воздействуют и на Y и на X). В этом случае возникает стохастическая зависимость.

Например, если Y зависит от случайных факторов Z_1, Z_2, U_1, U_2, а X зависит от случайных факторов $Z_2, Z_3, U_2, U_3, T_1, T_2$, то между Y и X имеется стохастическоезависимость, так как среди случайных факторов есть общие, а именно Z_2 и U_2.

Определение.*Стохастической*называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой.

В частности, стохастическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае стохастическуюзависимость называют ***корреляционной.***

Приведем пример случайной величины Y, которая не связана с величиной X функционально, а связана корреляционно. Пусть Y – урожай зерна, X – количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т.е. Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, как показывает опыт, *средний* урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Yсвязан с X корреляционной зависимостью.

2. Условные средние и корреляционная зависимость

Уточним определение корреляционной зависимости, для чего введем понятие условной средней.

Предположим, что изучается связь между случайной величиной Y и случайной величиной X. Пусть каждому значению X соответствует несколько значений Y. Например, пусть при $x_1 = 2$ величина Y приняла значения: $y_1 = 5,\ y_2 = 6,\ y_3 = 10$ по одному разу. Можно вычислить условное математическое ожидание величиныY, которое равно среднему арифметическому значению этих чисел:

$$\bar{Y}_{X=2} = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

Число $\bar{Y}_{X=2}$ называют условным средним; черточка над буквой Y служит обозначением среднего арифметического, а число 2 указывает, что рассматриваются те значения Y, которые соответствуют $X = 2$.

Применительно к примеру предыдущего параграфа эти данные можно истолковать так: на каждый из трех одинаковых участков земли внесли по 2 единицы удобрений и сняли соответственно 5, 6 и 10 единиц зерна; средний урожай составил 7 соответствующих единиц.

Условной средней $\bar{Y}_{X=2}$ называют среднее арифметическое значенийY, соответствующих значению $X = x$.

Если каждому значению Xсоответствует одно значение условной средней, то, очевидно, условная средняя есть функция от X; в этом случае говорят, что случайная величина Y зависит от Xкорреляционно.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней$\overline{Y_X}$от X:

$$\overline{Y}_{X=x} = f(x) \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) называют *уравнением регрессии* Y на X, функцию $f(x)$ называют *регрессией* Y на X, а ее график – *линией* регрессии Y на X.

Аналогично определяется условная средняя X и корреляционная зависимость X от Y.

Условной средней $\overline{X}_Y$ называют среднее арифметическое значений X, соответствующих $Y = y$.

Корреляционной зависимостью X от Y называют функциональную зависимость условной средней $\overline{X}_Y$ от $Y = y$:

$$\overline{Y}_{Y=y} = \varphi(y). \tag{3.23}$$

Уравнение (3.23) называют *уравнением регрессии* X на Y; функцию $\varphi(y)$ называют *регрессией* X на Y, а ее график - *линией регрессии* X на Y.

3. Модели регрессии. Если график регрессии $\overline{Y}_{X=x} = f(x)$ и $\overline{Y}_{Y=y} = \varphi(y)$ изображается прямой линией, то корреляцию называют линейной.

$$y_x = ax + b \quad \text{или} \quad x_y = xy + d.$$

В других случаях, например если график регрессии $\overline{Y}_{X=x} = f(x)$ или $\overline{Y}_{Y=y} = \varphi(y)$ изображается кривой линией, то корреляцию называют криволинейной.

Точнее, если функции регрессии X на Y имеют вид:

1) $y_x = ax^2 + bx + c,$ то ее называет параболической корреляцией второго порядка;

2) $y_x = ax^3 + bx^3 + cx + d,$ то параболической корреляцией третьего порядка;

3) $y_x = a / x,$ то гиперболическим корреляциям и т.д.

Теория криволинейной корреляции решает те же задачи, что и теория линейной корреляции (установление формы и тесноты корреляционной связи).

Неизвестные параметры уравнения регрессии ищут методом наименьших квадратов. Для оценки тесноты криволинейной корреляции служат выборочные корреляционные отношения.

4.Две основные задачи теории корреляции

Первая задача теории корреляции - установить форму корреляционной связи, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная показательная и т.д.). Наиболее часто функции регрессии оказываются линейными. Если обе функции регрессии $f(x)$ и $\varphi(y)$ линейны, то корреляцию называют *линейной,*в противном случае -*нелинейной.* Очевидно, что при линейной корреляции обе линии регрессии являются прямыми линиями.

Вторая задача теории корреляции — оценить тесноту (силу) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости X от Y оценивается по величине рассеяния значений Y вокруг условного среднего $\overline{Y}_X$. Большое рассеяние свидетельствует о слабой зависимости Y от X либо об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает на наличие достаточно сильной зависимости; возможно даже, что Y и X связаны функционально, но под воздействием второстепенных случайных факторов эта связь оказалась размытой, в результате чего при одном и том же значении X величина Y принимает различные значения.

Аналогично (по величине рассеяния значений вокруг X условного среднего $\overline{X}_Y$) оценивается теснота корреляционной связи X от Y.

Пример 3.25 По данным, приведенным в таблице, найти условную среднюю $\overline{X}_Y$.

y \ x	4	5	6	7	n_y
1	3	1	-	3	7
2	-	2	4	1	7
3	5	1	5	-	11
n_x	8	4	9	4	$n = 25$

Решение.

$$\overline{X}_{Y=1} = \frac{4\cdot 3+5\cdot 1+6\cdot 0+7\cdot 3}{7} = \frac{39}{7},$$

$$\overline{X}_{Y=2} = \frac{4\cdot 0+5\cdot 2+6\cdot 4+7\cdot 1}{7} = \frac{41}{7},$$

$$\overline{X}_{Y=3} = \frac{4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 5+7\cdot 0}{7} = \frac{55}{11}.$$

Пример 3.26 По 5 предприятиям, выпускающим однородную продукцию, получены следующие данные:

Энерговооружённость предприятия – X (кВт/час)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Производительность труда – Y (шт)	14	16	14	15	17

Найти выборочный коэффициент корреляции, определяющий зависимость производительности труда (Y) от энерговооружённости (X).

Решение.Найдём

$$r_{выб} = \frac{\sum x_i, y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x \sigma_y}.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\overline{X}_n = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68,$$

$$\overline{Y}_n = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{X}_n)^2} = \sqrt{\frac{7.1^2+8.3^2+8.5^2+9^2+10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_j^2}{n} - (\overline{Y}_n)^2} = \sqrt{\frac{14^2+16^2+14^2+15^2+17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$\sum x_i y_i = 7.1\cdot 14+8.3\cdot 16+8.5\cdot 14+9\cdot 15+10.5\cdot 17 = 664.7.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции:

$$r_b = \frac{664.7 - 5\cdot 8.68\cdot 15.2}{5\cdot 1.1\cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

Найденный коэффициент корреляции указывает на достаточно сильную зависимость между признаками X и Y.

Пример 3.27 На основании данных, приведенных в корреляционной таблице, вычислить коэффициент корреляции.

Y / X	3	4	5	6	n_y
2	5	-	7	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	$n = 25$

Решение.

$$\overline{X}_n = \frac{6\cdot 3+6\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6}{25} = \frac{18+24+30+42}{25} = 4.56.$$

$$\overline{Y}_n = \frac{10\cdot 2+3\cdot 3+12\cdot 4}{25} = \frac{20+9+48}{25} = 3.08,$$

$$\overline{X}_n^2 = \frac{9\cdot 6+16\cdot 6+25\cdot 6+36\cdot 7}{25} = \frac{54+96+150+252}{25} = 22.08$$

$$\overline{Y}_n^2 = \frac{4\cdot 10+9\cdot 3+16\cdot 12}{25} = \frac{40+24+192}{25} = 10.36$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{X}_n^2 - (\overline{X}_n)^2} = \sqrt{22.08-4.56^2} \approx 1.18,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{Y}_n^2 - (\overline{\mathrm{Y}}_n)^2} = \sqrt{10.36-(3.08)^2} \approx 0.87.$$

Следовательно, $\sum n_{xy}xy = 357.$

5. Отыскание параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов

Предположим, что зависимость между случайными величинами X и Y близка к линейной (коэффициент корреляции $r_{x,y}$ близок к +1 или -1). В этом случае следует искать связь между X от Y в виде линейной функции

$$y = ax + b, \tag{3.24}$$

т.е. $M_{X=x}(Y) = ax + b.$ (3.25)

Таким образом, по методу наименьших квадратов мы должны найти такую прямую (3.24), чтобы сумма квадратов

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_1 - \left(ax_1 + b\right)\right)^2 \tag{3.26}$$

была минимальной.

Для отыскания минимума приравниваем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

После очевидных преобразований получаем;

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Разделив обе части каждого уравнения на $\boldsymbol{n}$, получаем:

$$\begin{cases} \overline{(x_n \cdot y_n)} - a\,\overline{(x_n^2)} - b\bar{x}_n = 0, \\ \bar{y}_n - a\bar{x}_n - b = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Решив эту систему, находим оценки значения неизвестных параметров **a** и**b**:

$$a_n = \frac{\overline{(x_n \cdot y_n)} - \bar{x}_n \cdot \bar{y}_n}{(x_n^2) - (\bar{x}_n)^2}, \quad (3.30)$$
$$\mathrm{b}_n = \bar{y}_n - a\bar{x}_n.$$

Таким образом, искомая линейная зависимость имеет вид:

$$y = ax + (\bar{y}_n - a\bar{x}_n)$$

или

$$y - \bar{y}_n = a_n(x - \bar{x}_n), \quad (3.31)$$

где значение a_n указано в (3.30).

6. Выборочный коэффициент корреляции

Заметим, что выражение $\overline{(x_n \cdot y_n)} - \bar{x}_n \cdot \bar{y}_n$, стоящее в числителе формулы (3.30), есть выборочный корреляционный момент $K_{x,y_{выб}}$, знаменатель же $\overline{(x_n^2)} - (\bar{x}_n)^2$, являющийся выборочной дисперсией, может быть заменен на$\sigma_{X_n}^2$. Следовательно, для параметра **a** имеем выражение

$$a_n = \frac{K_{x,y_{выб}}}{\sigma_{Xn}^2} = \frac{K_{x,y_{выб}}}{\sigma_{X_n} \cdot \sigma_{Y_n}} \cdot \frac{\sigma_{Y_n}}{\sigma_{X_n}} = r_{X,Y_n} \cdot \frac{\sigma_{Y_n}}{\sigma_{X_n}},$$

где $r_{выб} = \dfrac{K_{x,y_{выб}}}{\sigma_{X_n} \cdot \sigma_{Y_n}}$ - выборочный коэффициент корреляции.

Отсюда выборочное уравнение линейной регрессии Y на Xсоответственно имеет вид:

$$y-\overline{y}_n = r_{выб}\cdot\frac{\sigma_{Y_n}}{\sigma_{X_n}}(x-\overline{x}_n), \qquad (3.32)$$

выборочное уравнение линейной регрессии X на Y имеет вид:

$$x-\overline{x}_n = r_{выб}\cdot\frac{\sigma_{X_n}}{\sigma_{Y_n}}(y-\overline{y}_n). \qquad (3.33)$$

Выборочный коэффициент корреляции имеет те же свойства, что и обычный коэффициент корреляции $r_{X,Y}$.

7. Линейная регрессионная модель общего вида(криволинейная регрессия).

В общем случае, если регрессия Y на X отличается от линейной, рассматривают линейную (по параметрам) регрессионную модель вида

$$\varphi\left(x_i;a_0,a_1,...,a_{k-1}\right)=a_0+a_1\alpha_1(x)+a_2\alpha_2(x)+\cdots+a_{k-1}\alpha_{k-1}(x), \qquad (3.34)$$

где $\alpha_1(x),\alpha_1(x),...,\alpha_1(x)$ – известные функции, а $a_0,a_1,...,a_{k-1}$ – неизвестные параметры.

Из необходимых условий минимума функции $\Phi(a_0,a_1,...,a_{k-1})$ следует, что оценки $a_0,a_1,...,a_{k-1}$ являются решениями линейной алгебраической системы $\boldsymbol{k}$ уравнений

$$\begin{cases} a_0 n+a_1\sum\alpha_1(x_i)+...+a_{k-1}\sum\alpha_{k-1}(x_i)=\sum y_i, \\ a_0\sum\alpha_1(x_i)+a_1\sum\alpha_1(x_i)\sum\alpha_1(x_i)+...+ \\ +a_{k-1}\sum\alpha_{k-1}(x_i)\sum\alpha_1(x_i)=\sum y_i\sum\alpha_1(x_i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_0\sum\alpha_{k-1}(x_i)+a_1\sum\alpha_1(x_i)\sum\alpha_{k-1}(x_i)+...+ \\ +a_{k-1}\sum\alpha_{k-1}(x_i)\sum\alpha_{k-1}(x_i)=\sum y_i\sum\alpha_{k-1}(x_i), \end{cases} \qquad (3.35)$$

называемой нормальной системой.

8. Нахождение параметров нелинейной регрессии (параболической, гиперболической и др.) методом наименьших квадратов

8.1. Предположим, что корреляционная связь между случайными величинами X и Y параболическая, т.е.

$$y=ax^2+bx+c, \qquad (3.36)$$

Мы будем искать такие значения параметров a,b и c, чтобы функция

$$\Phi(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(ax_i^2+bx_i;+c\right)\right)^2 \qquad (3.37)$$

при этих a,b и c,принимала наименьшее значение.

Находим минимум этой функции стандартным способом. Составляем систему нормальных уравнений и решаем ее относительно этих параметров:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i; +c\right)\right)x_i^2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i; +c\right)\right)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i; +c\right)\right) = 0, \end{cases}$$

Упрощая полученную систему (и считая $\alpha_1(x) = x,\ \alpha_2(x) = x^2$),получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - nc = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы и дает оценки для параметров a_n, b_n и c_n.

8.2.Предположим, теперь, что связь между случайными величинами X и Y гиперболическая, т.е. $\alpha_1(x) = 1/x$ и

$$y = \frac{a}{x} + b. \tag{3.38}$$

Чтобы найти значения переменных a и b, обращающих функцию

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (\frac{a}{x_i} + b)\right)^2$$

в минимум, опять составляем систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (\frac{a}{x_i} + b)\right)\frac{1}{x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (\frac{a}{x_i} + b)\right) = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

упрощая которую получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} - a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} - b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - nb = 0. \end{cases} \tag{3.40}$$

Решение этой системы и дает оценки для $a,\ b$.

Пример 3.28 По 5 предприятиям, выпускающим однородную продукцию, получены следующие данные:

Энерговооружённость предприятия – X (кВт/час)	7.1	8.3	8.5	9	10.5
Производительность труда – Y (шт)	14	16	14	15	17

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии, определяющей зависимость производительности труда (Y) от энерговооружённости (X).

Решение.Найдем

$$r_{выб} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\overline{X}_n = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68,$$

$$\overline{Y}_n = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{X}_n)^2} = \sqrt{\frac{7.1^2+8.3^2+8.5^2+9^2+10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum y_j^2}{n} - (\overline{Y}_n)^2} = \sqrt{\frac{14^2+16^2+14^2+15^2+17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$\sum x_i y_i = 7.1\cdot 14 + 8.3\cdot 16 + 8.5\cdot 14 + 9\cdot 15 + 10.5\cdot 17 = 664.7.$$

отсюда получаем выборочный коэффициент линейной корреляции :

$$r_{выб} = \frac{664.7 - 5\cdot 8.68\cdot 15.2}{5\cdot 1.1\cdot 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

Найденный коэффициент выборочной корреляции указывает на достаточно сильную зависимость между признаками X и Y.

Подставив вычисленные значения в формулу уравнения регрессии

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{выб}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

найдем

$$\overline{y_x} - 15.2 = 0.79\cdot\frac{1.16}{1.1}(x - 8.68),$$

откуда:

$$\bar{y}_x = 0.82x + 8.08$$

Это уравнение определяет корреляционную зависимость производительности труда (Y) и энерговооруженности (X).

Пример 3.29 На основании данных, приведенных в корреляционной таблице, найти уравнение прямой линии регрессии Y на X .

Y \ X	3	4	5	6	n_y
2	5	-	7	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	$n = 25$

Решение.

$$\bar{X}_n = \frac{6\cdot 3+6\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6}{25} = \frac{18+24+30+42}{25} = 4.56.$$

$$\bar{Y}_n = \frac{10\cdot 2+3\cdot 3+12\cdot 4}{25} = \frac{20+9+48}{25} = 3.08,$$

$$\bar{X}_n^2 = \frac{9\cdot 6+16\cdot 6+25\cdot 6+36\cdot 7}{25} = \frac{54+96+150+252}{25} = 22.08$$

$$\bar{Y}_n^2 = \frac{4\cdot 10+9\cdot 3+16\cdot 12}{25} = \frac{40+24+192}{25} = 10.36$$

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{X}_n^2 - (\bar{X}_n)^2} = \sqrt{22.08 - 4.56^2} \approx 1.18,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\bar{Y}_n^2 - (\bar{Y}_n)^2} = \sqrt{10.36 - (3.08)^2} \approx 0.87.$$

$$\sum n_{xy}xy = 357.$$

Для контроля аналогичные вычисления проводят по столбцам. Искомый выборочный коэффициент корреляции

$$r_{выб} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{357 - 25\cdot 4.56\cdot 3.08}{25\cdot 1.18\cdot 0.87} = \frac{5.88}{25.665} \approx 0.23.$$

Подставив найденные величины в формулу уравнения регрессии, получим:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{выб}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \bar{x}\right).$$

Отсюда следует, что:

$$y = 0.1695x + 2.3067.$$

$$r_{выб} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{357 - 25\cdot 4.56\cdot 3.08}{25\cdot 1.18\cdot 0.87} = \frac{5.88}{25.665} \approx 0.23.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В течение месяца по 10 продовольственным магазинам собраны данные о зависимости товарооборота (Y) от расходов на рекламу (X). Найти выборочный коэффициент корреляции, определяющий зависимость X от Y.

X(млн.сум)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y(млн.сум)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

2. Найти выборочный коэффициент корреляции, определяющий зависимость Xот Y.

X	6	6.8	7	8	8.5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

3. По приведенным данным об урожайности с 1 га (Y) и количестве внесенных удобрений (X) найти выборочный коэффициент корреляции, определяющий зависимость X от Y.

X	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y	25	27	26	30	32	35	38

4. Найти выборочный коэффициент корреляции, определяющий зависимость X от Y, и вычислить условные средние $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

5. По приведенным ниже данным об объеме основных фондов (X) сахарных заводов и расходов заводами в течение суток сахарной свеклы (Y), найти выборочныйкоэффициент корреляции и условные средние $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$, определяющие зависимость X от Y.

X (млн.сум)	150	250	270	350	370	400	420
Y (тыс.ц)	6	6	7	8	8	8	10

6. С целью изучения зависимости фонда месячной заработной платы (Y) и объема выпущенной продукции (X) по 10 промышленным предприятиям получены следующие данные:

Предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (млн.сум)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (млн.сум)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

Найти выборочныйкоэффициент корреляции и условные средние $\overline{X}_y$ и $\overline{Y}_x$, определяющие зависимость X от Y.

7.Вычислить выборочные коэффициенты корреляции.

X	8	10	5	8	9
Y	1	3	1	2	3

8.Вычислить выборочные коэффициенты корреляции.

X	9	10	12	5
Y	6	4	7	3

9.Вычислить выборочные коэффициенты корреляции.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

10. Предел выносливости стали при изгибе Y (Н/мм²) оценивается на основании другой ее характеристики – предела упругости при кручении X (Н/мм²). По опытным данным для 12 марок стали найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y, вычислить коэффициент корреляции между этими характеристиками. Результаты измерений:

X	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
Y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

$\sum x_i = 1015,\ \sum y_i = 553,\ \sum x_i^2 = 90667,\ \sum y_i^2 = 26807,\ \sum x_i y_i = 48888.$

11. По данным измерения двух переменных

X	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
Y	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

12.Составьте выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным выборки:

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

13. По данным, приведенным в корреляционной таблице, найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X \ Y	3	4	5	6	n_y
2	5	-	1	4	10
3	1	2	-	-	3
4	-	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	$n = 25$

14. По данным приведенным в корреляционной таблице найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X \ Y		3	3,5	4	4,5	5
7		5	3	-	-	-
9		2	3	5	3	1
13		-	1	1	2	2

15. По данным приведенным в корреляционной таблице, найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X	3	5	1	-2	4	2	1	0	3
Y	-2	0	1	5	1	2	3	1	1

16. Составьте выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным, приведенным в таблице:

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

17. По данным, приведенным в корреляционной таблице, найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X \ Y	6	30	50	n_y
1	15	-	1	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	$n = 25$

18. По данным, приведенным в корреляционной таблице, найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X \ Y	1	9	19	n_y
0	13	-	1	13
2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n = 50$

19. По данным, приведенным в таблице, составьте уравнение прямой линии регрессии Y на X.

X \ Y	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

20. По данным, приведенным в корреляционной таблице, найти выборочные уравнения прямой линии регрессии X на Y и Y на X.

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-		5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-		-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	И	8	6	5	2	$n = 50$

21. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии X на Y и Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X \ Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-		-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

22. В течение месяца по 10 продовольственным магазинам собраны данные о зависимости товарооборота (Y) от расходов на рекламу (X). Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X .

X (млн.сум)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (млн.сум)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

23. По данным, приведенным в таблице, найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X .

X	6	6.8	7	8	8.5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

24. По приведенным данным об урожайности с 1 га (Y) и количестве внесенных удобрений (X), составить выборочное уравнение регрессии.

X	6	7	7,5	8	9	9.5	10
Y	25	27	26	30	32	35	38

25. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице.

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

26. По приведенным ниже данным об объеме основных фондов (X) сахарных заводов и расходов заводами в течение суток сахарной свеклы (Y) найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

X(млн.сум)	150	250	270	350	370	400	420
Y(тыс.ц)	6	6	7	8	8	8	10

27. С целью изучения зависимости фонда месячной заработной плиты (Y) и объема выпущенной продукции (X) по 10 промышленным предприятиям получены следующие данные:

Предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (млн.сум)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
$У$ (млн.сум)	110	120	130	135	138	145	150	154	160	164

Составить уравнение прямой линии регрессии Y на X.

В задачах 28-31 вычислить выборочные коэффициенты корреляции, определить и нанести на диаграмму рассеивания прямые регрессии Y на X и X на Y по данным выборкам.

28.

X	8	10	5	8	9
Y	1	3	1	2	3

29.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

30. Предел выносливости стали при изгибе Y (Н/мм²) оценивается на основании другой ее характеристики – предела упругости при кручении X (Н/мм²). По опытным данным для 12 марок стали, приведенным в таблице, вычислить выборочный коэффициент корреляции между этими характеристиками и найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y

x_i	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
y_i	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

31. По данным измерения двух переменных

x_i	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y_i	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти уравнение линейной регрессии Y на X.

§3.8 ВЫБОРОЧНОЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ.

ПОНЯТИЕ О МНОЖЕСТВЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

1. Выборочное корреляционное отношение

Для оценки тесноты *линейной* корреляционной связи между признаками в выборке служит выборочный коэффициент корреляции. Для оценки тесноты *нелинейной*корреляционной связи вводят новые сводные характеристики:

η_{xy} – выборочное корреляционное отношение Y к X;

η_{yx} – выборочное корреляционное отношение X к Y.

Определение. *Выборочным корреляционным отношением* Y к X называют отношение межгруппового среднеквадратического отклонения к общему среднеквадратическому отклонению признака Y.

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{Y}_x}}{\sigma_y} \qquad (3.41)$$

где $\sigma_y^2=\frac{1}{n}\sum y_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)^2$ и $\sigma_{\overline{y}_x}^2=\frac{1}{n}\sum n_{x_i}(\overline{Y}_{x_i})^2-\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)^2$

Здесь n – объем выборки, n_{x_i} – частота варианты x_i, n_{x_i} - частота варианты y_i, $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum x_i$ и $\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum y_i$ - общая (безусловная) средняя X и Y соответственно.

Аналогично определяется выборочное корреляционное отношение X к Y:

$$\eta_{xy}\frac{\sigma_{\overline{X}_y}}{\sigma_x} \tag{3.42}$$

2. Свойства выборочного корреляционного отношения

Поскольку η_{xy} обладает тем и же свойствами, что и η_{xy}, перечислим свойства только выборочного корреляционного отношение η_{xy} которое далее для упрощения записи будем обозначать через η и для простоты речи называть «корреляционным отношением».

1. *Корреляционное отношение удовлетворяет двойному неравенству:*

$$0\le\eta\le1.$$

Доказательство. Неравенство $0\le\eta$ следует из того, что ηесть отношение неотрицательных чисел – среднеквадратических отклонений (межгруппового к общему).

Для доказательства неравенства $\eta\le1$ воспользуемся соотношением

$$\left(k_1x+k_2y\right)^2=k_1x^2+k_2y^2-k_1k_2\left(x-y\right)^2\le k_1x^2+k_2y^2 \text{при } \ k_1+k_2=1 \tag{3.43}$$

с одной стороны и выпуклостью функции $f(u)=u^2$ с другой стороны:

$$\sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum n_{x_i}x_i^2-(\overline{X}_n)^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2\sum n_{ij}-(\overline{X}_n)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_j n_j\sum_i\frac{n_{ij}}{n_j}x_i^2-(\overline{X}_n)^2\ge\frac{1}{n}\sum_j n_j\sum_i\left(\frac{n_{ij}}{n_j}x_i\right)^2-\left(\overline{X}_n\right)^2=$$

$$\frac{1}{n}\sum_j n_j\left(\overline{X}_{y_j}\right)^2-\left(\overline{X}_n\right)^2=\sigma_{\overline{X}_y}^2.$$

Разделив обе части неравенств на σ_x^2, получим $\eta\le1$.

2. *Если $\eta=0$, то случайна величина Y со случайной величиной X корреляционной зависимостью не связана.*

Доказательство. Пусть $\eta = 0$.Тогда из (3.43) нетрудно убедиться, что условная средняя $\overline{Y}_x$ постоянная величина и $\overline{Y}_x = \overline{Y}_n$. Отсюда

$$\overline{(X \cdot Y)} = \frac{1}{n}\sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i \sum_j \frac{n_{ij}}{n_i} y_j = \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i \overline{Y}_{x_i} = \overline{X}_n \cdot \overline{Y}_n. \qquad (3.44)$$

Следовательно, $r_{xy} = 0$.

Замечание. Можно доказать и обратное: если случайная величина Y не связанасо случайной величиной X корреляционной зависимостью, то $\eta = 0$.

3. *Если* $\eta = 1$, *то случайна величина* Y *со случайной величиной* X *функциональной зависимостью.*

Доказательство. Пусть $\eta = 1$.Тогда из $\sigma_y^2 = \sigma_{\overline{Y}_x}^2$ нетрудно убедиться, что

$\sum_j n_j y_j^2 = \sum_i n_i (\overline{Y}_{x_i})^2$, $\qquad \sum_i n_i \sum_j \frac{n_{ij}}{n_i} y_j^2 = \sum_i n_i (\overline{Y}_{x_i})^2$ и

$\sum_i n_i \sum_j \frac{n_{ij}}{n_i} y_j^2 = \sum_i n_i (\overline{Y}_{x_i})^2$ и $\sum_j \frac{n_{ij}}{n_i} y_j^2 = \left(\overline{Y}_{x_i}\right)^2$ т.е. для каждого фиксированного значения $\{X = x_i\}$ величина Yявляется неслучайной, следовательно она и есть функция от X .

Замечание.Можно доказать и обратное предложение; если случайная величинаY связана со случайной величинойX функциональной зависимостью, то $\eta = 1$.

Примем без доказательства еще два свойства.

1. Выборочное корреляционное отношение не меньше абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции: $\eta = r_{xy}$.

2. Если выборочное корреляционное отношение равно абсолютной величине выборочного коэффициента корреляции, то имеет место точная корреляционная зависимость.

Другими словами, если $\eta = r_{xy}$, то точки $(x_1 y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ лежат на прямой линии регрессии, найденной методом наименьших квадратов.

3. Множественная корреляция

До этого момента мы рассматривали корреляционную связь между двумя величинами. Если же исследуется связь между несколькими случайными величинами,то такую корреляцию называют *множественной.*

Рассмотрим случай, когда число случайных величин равно трем, и связь между нимилинейная: $z = ax + by + c.$
В этом случае возникают задачи:

1)найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида

$$z = Ax + By + C, \tag{3.45}$$

т.е. требуется найти коэффициенты регрессии A и B и параметр C;

2) оценить тесноту связи между Z и величинами $X, Y.$

3) оценить тесноту связи между Z и X (при постоянном Y), между Z и Y (при постоянном X).

Первая задача решается методом наименьших квадратов, причем вместо уравнения (3.45) удобнее искать уравнение связи в виде:

$$z - \overline{Z}_n = A\left(x - \overline{X}_n\right) + B\left(y - \overline{Y}_n\right),$$

где

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x}; \qquad B = \frac{r_{yz} - r_{xz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Здесь r_{xy}, $r_{yz} r_{xy}$ - коэффициенты корреляции между величинами X и Z, Y и Z, X и Y соответственно, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – среднеквадратические отклонения.

Теснота связи величины Z с величинами X, Y оценивается выборочным совокупным коэффициентом корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2 r_{xy} r_{yz} r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}} \tag{3.46}$$

Причем $0 \le R \le 1.$

Теснота связи между величинами Z и X (при постоянном Y), между Z и Y (при постоянном X) оценивается соответственно частными выборочными коэффициентами корреляции:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}};$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}.$$

Эти коэффициенты служат для оценки линейной связи между указанными величинами.

Пример 3.30 По данной корреляционной таблице найти корреляционное отношение η_{yx} признака Y по X .

$X \backslash Y$	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y_x}$	21	15	20	

Решение: Найдем общую среднюю:

$$\overline{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{35\cdot 15 + 15\cdot 5}{50} = 17.4$$

Найдем общее среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y \left(y-\overline{y}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{38\left(15-17.4\right)^2 + 12\left(25-17.4\right)^2}{50}} = 4.27$$

Условное среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x \left(y-\overline{y}\right)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10\left(21-17.4\right)^2 + 25\left(15-17.4\right)^2 + 12\left(20-17.4\right)^2}{50}} = 2.73$$

Откуда получаем:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{2.73}{4.27} = 0.64.$$

Пример 3.31 По данным корреляционной таблицы найти выборочное уравнение регрессии: $\overline{Y}_x = Ax^2 + Bx + C.$

X \ Y	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
5	3	5	10	2	-	20
10	-	-	7	12	-	19
17	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n=100$

Решение: Составив расчетную таблицу

X	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$	$n_x \overline{y_x}\, x$	$n_x \overline{y_x} x^2$
0	22	0.8	0	0	0	0	17.6	0	0
1	26	3.27	26	26	26	26	85.02	85.02	85.02
2	18	6.67	3.6	72	144	288	120.06	240.12	480.24
3	14	9.3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
	100		184	544	1828	6568	692.65	2075.14	7175.26

и подставив числа, содержащиеся в последней строке, получим систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases} 6568A + 1828B + 544C = 7175.26 \\ 1828A + 544B + 184C = 2075.14 \\ 544A + 184B + 100C = 692.68 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$A = 0.66, \quad B = 1.23, \quad C = 1.07.$$

Подставив в уравнение регрессии

$$\overline{y}_x = Ax_2 + Bx + C$$

получим:

$$\overline{y}_x = 0.66x^2 + 1.23x + 1.07.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. По данным таблиц в задачах 1-8 найти уравнение регрессии в виде $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ и корреляционные отношения η_{xy} и η_{yx}:

X \ Y	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

2.

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
3	1	14	-	15
4	-	2	18	20
n_x	16	16	18	$n = 50$

3.

Y \ X	1	9	19	n_y
0	13	-	-	13
2	2	10	-	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	$n = 50$

4.

X \ Y	10	11	12	13	14	15
25	5	3	1	-	-	-
30	2	4	2	1	-	-
40	-	1	5	4	1	-
45	-	-	2	3	4	1
50	-	-	-	1	3	2

5.

X \ Y	40-50	50-60	60-70	70-80
10-11	2	11	3	2
11-12	1	19	2	4
12-13	3	6	27	6
13-14	2	3	3	8

6.

X \ Y	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
10-20	5	7	0	0	0	0
20-30	0	20	23	0	0	0
30-40	0	0	30	47	2	0
40-50	0	0	10	11	20	6
50-60	0	0	0	9	7	3

7.

X \ Y	30-50	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
50-70	5	0	0	0	0	0	0
70-90	2	3	4	0	0	0	0
90-110	0	1	7	6	0	0	0
110-130	0	0	1	8	4	0	0
130-150	0	0	1	1	5	2	0
150-170	0	0	0	0	0	5	0
170-190	0	0	0	0	0	0	2
190-210	0	0	0	0	0	0	2

8.

X \ Y	7,0-7,2	7,2-7,4	7,4-7,6	7,6-7,8	7,8-8,0
2,15-2,45	5	4	0	0	0
2,45-2,75	0	12	8	1	0
2,75-3,05	0	0	5	5	0
3,05-3,35	0	0	4	7	0
3,35-3,65	0	0	0	12	1
3,65-3,95	0	0	0	0	1

В задачах 9-12:

1) найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида

$Z = AX + BX + C$т.е. требуется найти коэффициенты регрессии A и B и параметр C;

2) вычислитькоэффициент множественной корреляции (т.е.оценить тесноту связи между Z величинами X, Y);

3) оценить тесноту связи между Z и X (при постоянномY), между Z и Y(при постоянном X):

9.

X_n	1	-1	2	1	-1	-4	7	0	8	3	6	-2
Y_n	-1	1	-2	-6	-8	5	3	-3	0	-10	2	7
Z_n	2	0	1	-4	-8	4	11	-2	9	8	10	5

10.

X_n	1	4	0	5	-3	3	-5	-1	2	-2
Y_n	4	-6	2	-4	12	-2	14	6	0	8
Z_n	-4	-5	4	-1	4	0	5	1	2	7

11.

X_n	31	34	35	41	38	32	29	34
Y_n	29.5	14.2	18.0	21.3	47.5	10.0	21.0	36.5
Z_n	22.0	14.0	23.0	43.0	66.0	7.6	12.0	36.0

12.

X_n	0	44	4	61	35	64	13	56	18	2
Y_n	14	0	29	34	54	16	44	59	49	32
Z_n	0.5	47.2	8	63.8	18.2	47.5	0	60.9	19.2	9

Считая, чтов задачах 13-16 зависимость между величинами X и Y имеет вид квадратичной регрессии второго порядка$Y = Ax^2 + Bx + C$, найти оценки параметров A, B и C.

13.

X_n	0	2	4	6	8	10
Y_n	5	-1	-0.5	1.5	4.5	8.5

14.

X_n	0.07	0.31	0.61	0.99	1.29	1.78	2.04
Y_n	1.34	1.08	0.94	1.06	1.25	2.01	2.60

15.

X_n	26	30	34	38	42	46	50
Y_n	3.94	4.60	5.67	6.93	8.25	7.73	10.55

16.

3 X_n	-2	-1	0	1	2
Y_n	4.8	0.4	-3.4	0.8	3.2

В задачах 17-19 найти оценки параметров A и B методом наименьших квадратов, считая, что между величинами X и Y гиперболическая регрессия первого порядка

$$Y = A + \frac{B}{x}.$$

17.

X_n	2	4	6	12
Y_n	8	5.25	3.50	3.25

18.

X_n	5.67	4.45	3.84	3.74	3.73	2.18
Y_n	6.8	8.5	10.5	10.2	6.8	11.8

19.

X_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_n	16.50	13.75	13.31	12.50	13.51	12.75	12.30	12.83	12.28	12.34

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Ш. Кремер. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2007.
2. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа, 2002.
3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ИНФРА-М, 2004
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2008.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по “Теории вероятностей и математической статистике”. Учебное пособие. 11-издание. М.: 2008.
6. SheldonRoss. Afirstcourseinprobability. Eight edition. University of Southern California. Prentice Hall is an imprint of Pearson, 2010
7. MarcelB. Finan. AprobabilityofcoursefortheActuaries. Arkansas Tech University, 2013.
8. PrasannaSahoo. Probability and mathematical statistics. Department of mathematics, University of Louisville, 2013.
9. Adirov T., Adigamova E. «Теория вероятностей и математическая статистика». Сборникзадач. T.: TMI, 2003.
10. Бабаджанов Ш.Ш. “Материалы для самостоятельных работ по теории вероятностей и математической статистике”. Учебное пособие. М.: “ Iqtisod -Moliya” , 2006.
11. Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика.Курс лекций. Т.: ТМИ, 2004.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Мирзиёев. Выступление на торжественной церемонии вступления в должность Президента Республике Узбекистан на совместном заседании палат Олий Мажлиса,2016, Ташкент Узбекистан.
2. Ш. Мирзиёев. Доклад на расширенном заседании Кабинета Министров, посвященном итогам социально-экономическогоразвития страны в 2016 и важнейшим приоритетнымнаправлениям экономической программы на 2017 год, 14 января 2017 г.

3. Ш. Мирзиёев. Постановление Президента Республики Узбекистан от 20 апреля 2017 “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”.
4. Ш. Мирзиёев. Постановление Президента Республики Узбекистан “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Ташкентского Университета Информационных Технологий”. Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2017 год ., №11,ст.158.

Сайты Интернета и Ziyonet

http://www.rsl.ru/
http://www.msu.ru/
http://www.nlr.ru/
http://el.tfi.uz/pdf/enmcoq22_uzk.pdf
http://el.tfi.uz/pdf/enmcoq22_uzl.pdf.

Приложение 1

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	0956
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0180	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{\frac{z^2}{2}}dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382

0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3685	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	03708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4065	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633

продолжение

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	X	Φ(x)
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.54	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499828
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

Приложение 3

Таблица 3

Таблица значений $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$

γ / n	0.95	0.99	0.999	γ / n	0.95	0.99	0.999
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.57	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.001	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.927	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

Приложение 4

Таблица 4

Таблица значений $q_\gamma = q(\gamma, n)$

γ / n	0.95	0.99	0.999	γ / n	0.95	0.99	0.999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	0.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	0.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	0.23	80	0.161	0.226	0.31
15	0.46	0.73	0.15	90	0.151	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

Приложение 5

Таблица 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы К	**Уровень значимости α**					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01

19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.9	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.0	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0